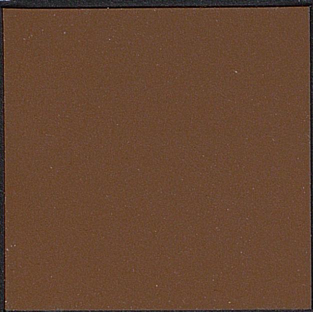
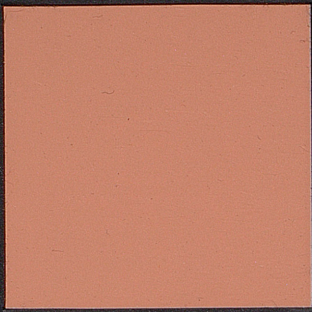
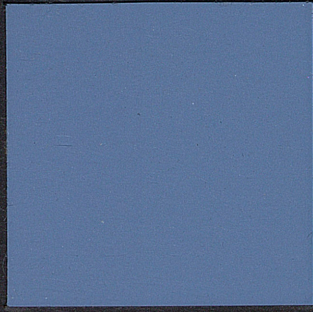
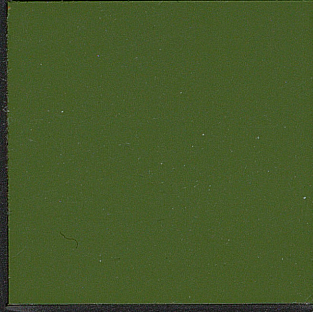
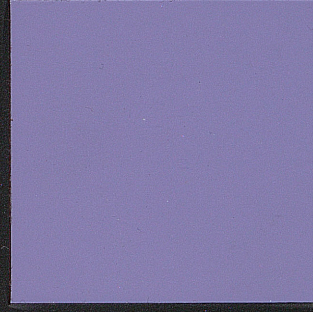
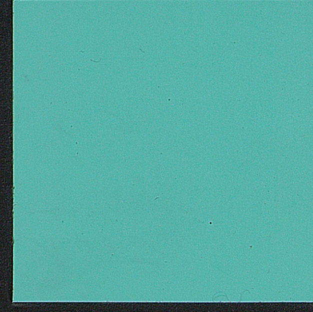
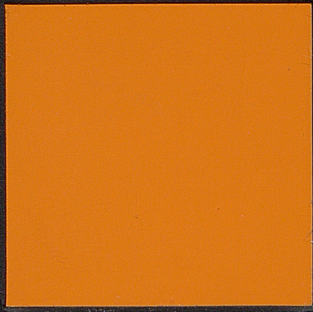
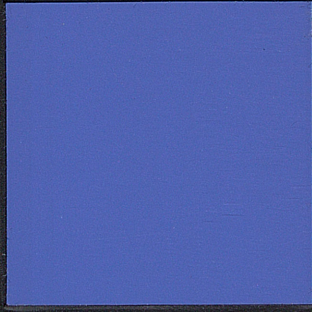
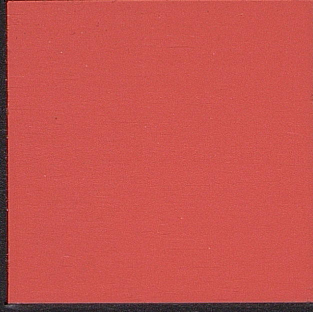
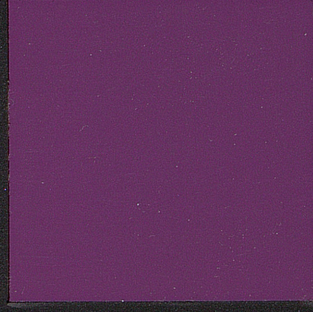
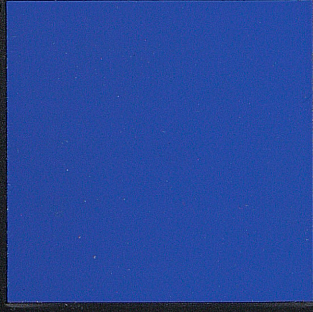
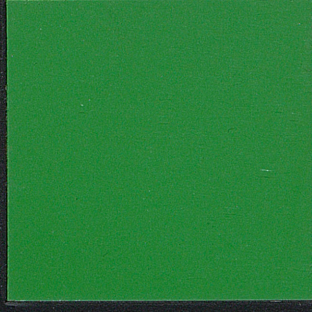
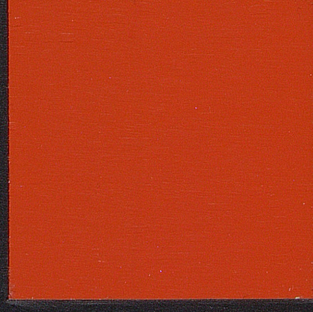
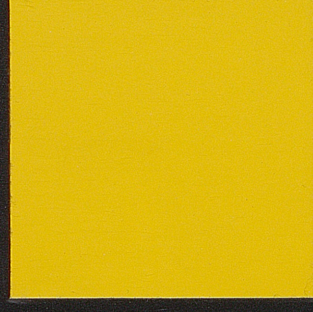
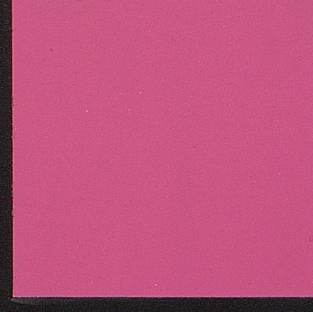
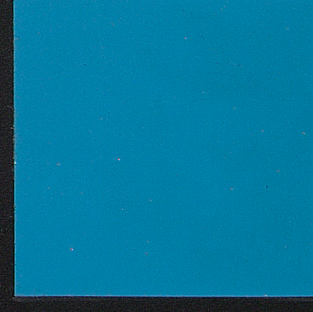
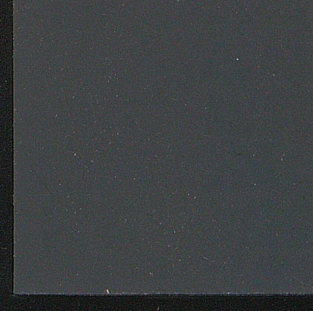
colorchecker CLASSIC



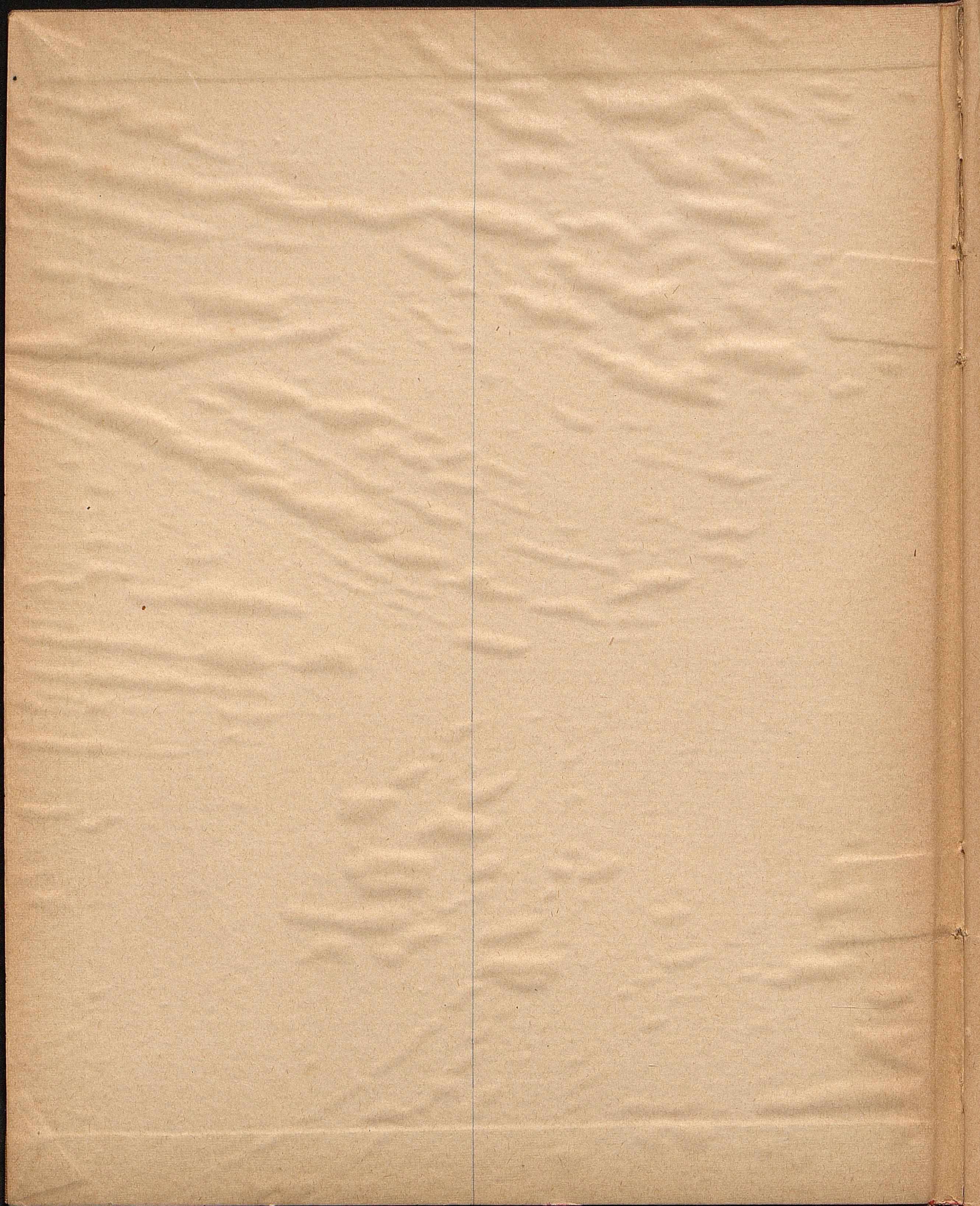

x·rite

mm

Calcul intégral

Cours de M. Picard
à la Faculté des sciences
1891–1892.

2e cahier Louis Couturat



Cours de Calcul intégral
professé par M. Picard
à la Faculté des sciences
1891-1892.
II.



Table

Développements en série (Cauchy, Fourier)

Nous avons montré que, en supposant que la variable complexe z croisse indéfiniment par la suite de valeurs absolues : $z_1, z_2, \ldots\ldots z_n \ldots\ldots$ et que, en posant :

$$F(z) = \frac{\psi(z)\,\varphi(z,x)}{\Pi(z)}$$

la quantité : $\frac{1}{2}\left[z\,F(z) - z\,F(-z)\right]$

ait pour limite en général la constante F, fonction de la variable réelle x, on a une formule qui permet de développer cette fonction en une somme des résidus de $F(z)$:

$$F(x) = \sum \frac{\psi(\lambda)\,\varphi(\lambda,x)}{\Pi'(\lambda)}$$

où λ est une quelconque des racines de l'équation transcendante :

$$\Pi(z) = 0.$$

Nous allons calculer maintenant cette limite $F(x)$.

Nous avons fait les 2 hypothèses suivantes :

$$\lim \frac{\psi(-z)}{\Pi(-z)} = c \qquad \lim \frac{\psi(z)}{\Pi(z)}\,e^{z(x-x_0)} = 0$$

Nous avons supposé en outre : $\varphi(z,x) = \int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu$

et nous avons prouvé que le produit :

$$z\int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu)\,d\mu \qquad x > x_0$$

reste fini quand z augmente indéfiniment par les valeurs susdites.

On s'est donné la fonction $f(x)$ arbitrairement, à la condition qu'elle n'ait qu'un nombre limité de maxima et de minima

Cela posé, l'expression : $\frac{1}{2}\left[z\,\mathcal{F}(z) - z\,\mathcal{F}(-z)\right]$ $(z>0)$ devient :

$$\frac{z}{2}\frac{\psi(z)}{\pi(z)}\int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu - \frac{z}{2}\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)}\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu .$$

Le 1er terme peut s'écrire, en faisant sortir la constante e^{zx} du signe $\int$:

$$\frac{z}{2}\left[\frac{\psi(z)}{\pi(z)}e^{z(x-x_0)}\right]\int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu)\,d\mu$$

Il tend en général vers zéro, car : $\lim \frac{\psi(z)}{\pi(z)}e^{z(x-x_0)} = 0$,

et d'autre part : $z\int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu)\,d\mu$ reste fini —

Donc le 2e terme a pour limite $F(x)$; or : $\lim \frac{\psi(-z)}{\pi(-z)} = c$,

on peut écrire : $-\frac{c}{2}\lim z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu = F(x)$

Cherchons cette limite pour z croissant indéfiniment par les modules $r_1, r_2, \ldots r_n \ldots$ et ayant toujours sa partie réelle positive, non nulle. Quand z est très grand, tous les éléments de l'intégrale tendent vers 0, sauf celui où $\mu = x$ (limite supérieure).

Partageons donc l'intégrale à étudier en 2 parties :

$$z\int_{x_0}^{x-\varepsilon} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu + z\int_{x-\varepsilon}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu$$

ε étant une quantité positive fixe, choisie aussi petite qu'on veut —

La 1e intégrale a pour limite zéro, comme nous venons de le dire —

Nous n'avons donc plus à considérer que la 2e, qui seule représente à la limite $F(x)$.

Elle se dédouble à son tour, si l'on pose l'identité :

$$f(\mu) = f(x) + \left[f(\mu) - f(x)\right]$$

$$f(x)\int_{x-\varepsilon}^{x} z e^{-z(x-\mu)} d\mu + \int_{x-\varepsilon}^{x} z e^{-z(x-\mu)} \left[f(\mu) - f(x)\right] d\mu$$

La 1e intégrale est aisée à calculer ; l'intégrale indéfinie est :

$e^{-z(x-\mu)}$ Prise entre $(x-\varepsilon)$ et x, elle donne :

$f(x)\left(1 - e^{-z\varepsilon}\right)$ qui tend vers $f(x)$ quand z augmente indéfiniment en dehors de l'axe des y (comme nous l'avons supposé.)

Quant à la 2e intégrale, on va démontrer qu'elle tend vers 0 avec ε au moyen du théorème de la moyenne. En effet, on peut toujours prendre ε assez petit pour que $f(\mu)$ n'ait ni maximum ni minimum dans l'intervalle $(x-\varepsilon)$ à x, c.à.d varie toujours dans le même sens ; supposons qu'elle aille en décroissant. On peut poser :

$$z e^{-z(x-\mu)} = P + Qi$$

et appliquer le théorème de la moyenne aux 2 intégrales réelles ainsi obtenues :

$$\int_{x-\varepsilon}^{x} P\left[f(\mu) - f(x)\right] d\mu = \left[f(x-\varepsilon) - f(x)\right]\int_{x-\varepsilon}^{\xi} P d\mu$$

où : $x - \varepsilon < \xi < x$

Or la différence entre crochets tend vers 0 avec ε, la fonction $f(x)$ étant supposée continue ; d'autre part, l'intégrale $\int_{x-\varepsilon}^{\xi} P d\mu$ reste finie, car c'est la partie réelle de :

$$\int_{x-\varepsilon}^{\xi} z e^{-z(x-\mu)} d\mu = e^{-z(x-\xi)} - e^{-z\varepsilon}$$

quantité finie, essentiellement positive, au plus égale à 1 (pour $\xi = x$). Donc la 2e intégrale tend vers 0 avec ε, et il reste finalement :

$$F'(x) = -\frac{c}{2} f(x)$$

Nous avons supposé que z s'éloigne à l'infini en dehors de l'axe des y. S'il suivait l'axe des y, on verrait, en appliquant encore le théorème de la moyenne que l'expression n'a pas pour limite $f(x)$, mais qu'elle reste finie ; ainsi l'axe Oy est une des directions exceptionnelles que nous avons prévues et admises, sur lesquelles le produit $z\,F(z)$ prend des valeurs singulières différentes de F', mais finies ; cela n'infirme donc nullement le résultat général que nous venons d'obtenir.

Nous avons aussi supposé que la fonction $f(x)$ était continue ; mais il suffit qu'elle n'ait qu'un nombre limité de discontinuités, et qu'elle reste finie en ces points singuliers. Soit a une des valeurs de x qui rendent $f(x)$ discontinue. On ne pourra plus parler de la valeur de $f(a)$; mais on connaît les valeurs limites de $f(x)$ quand x tend vers a par des valeurs inférieures ou supérieures ; on les désigne avec ~~Riemann~~ Dirichlet par les symboles : $f(a-\eta)$, $f(a+\eta)$

Supposons que x soit un point de discontinuité pour $f(x)$; le résultat précédent ne sera pas troublé, car μ tendant vers x par des valeurs inférieures et ne le dépassant pas, $f(\mu)$ sera déterminée dans tout l'intervalle (x_0, x) ; en x elle prendra la valeur $f(x-\eta)$; on aura donc

$$F'(x) = -\frac{c}{2} f(x-\eta)$$

On a vu qu'on peut développer F', et par conséquent f, en une série :

$$-\frac{c}{2} f(x) = \sum \frac{\psi(\lambda)}{\Pi'(\lambda)} \int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$

où la somme Σ_i est étendue à toutes les racines λ de l'équation transcendante :
$$\Pi(z) = 0 \qquad \text{(en nombre infini)}$$
Seulement la forme du terme général est compliquée, car x est engagé dans l'intégrale — Cauchy est parvenu à obtenir des exponentielles $e^{\lambda x}$ en dehors du signe $\int$ en combinant avec ce développement ~~un autre~~ développement analogue. Pour cela, il prend les nouvelles fonctions :
$$\mathcal{F}(z) = \frac{\chi(z)\,\varphi(z,x)}{\Pi(z)} \qquad \varphi(z,x) = \int_x^{x_1} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu$$
où : $x < x_1$

sur lesquelles il fait les hypothèses :
$$\lim \frac{\chi(z)}{\Pi(z)} = C \qquad \lim \frac{\chi(-z)}{\Pi(-z)} e^{z(x_1-x)} = 0 \quad \text{(en général)}$$
On obtient pour $F(x)$, limite de $\frac{1}{2}\left[z\,\mathcal{F}(z) - z\,\mathcal{F}(-z)\right]$ par des calculs tout semblables aux précédents, l'expression : $+ \frac{C}{2} f(x)$

D'où le développement analogue :
$$\frac{C}{2} f(x) = \Sigma \frac{\chi(\lambda)}{\Pi'(\lambda)} \int_x^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu$$
Faisons une hypothèse complémentaire sur les fonctions ψ et χ :
$$\psi(z) + \chi(z) = \Pi(z)$$
d'où :
$$\psi(-z) + \chi(-z) = \Pi(-z)$$
$$\frac{\psi(-z)}{\Pi(-z)} + \frac{\chi(-z)}{\Pi(-z)} = 1$$
Or $\frac{\chi(-z)}{\Pi(-z)}$ a pour limite 0, car ce rapport tend vers 0 avec le facteur $e^{z(x_1-x)}$ qui tend vers l'infini avec z ;

donc : $\lim \frac{\psi(-z)}{\Pi(-z)} = c = 1$ et de même : $\lim \frac{\chi(z)}{\Pi(z)} = C = 1.$

On a aussi : $\psi(\lambda) + \chi(\lambda) = \Pi(\lambda) = 0$

Donc les coefficients correspondants dans les 2 développements sont égaux et de signes contraires. Retranchons le 1er du 2e pour avoir $f(x)$:

$$f(x) = \sum \frac{\chi(\lambda)}{\Pi'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = -\sum \frac{\psi(\lambda)}{\Pi'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$

ou :

$$f(x) = -\sum \frac{\psi(\lambda)}{\Pi'(\lambda)} e^{\lambda x} \int_{x_0}^{x_1} e^{-\lambda\mu} f(\mu)\, d\mu = \sum_{\lambda} A e^{\lambda x}$$

On a ainsi le développement cherché de $f(x)$ par une série d'exponentielles, où λ est une quelconque des racines de l'équation : $\Pi(z) = 0.$

Pour cela il suffit d'avoir une suite de valeurs absolues $z_1, z_2 \ldots z_n \ldots$ telle que l'on puisse trouver des fonctions ψ et χ $(\Pi(z) = \psi(z) + \chi(z))$ vérifiant les 4 conditions :

$$\lim \frac{\psi(-z)}{\Pi(-z)} = 1 \qquad \lim \frac{\psi(z)}{\Pi(z)} e^{z(x-x_0)} = 0$$

$$\lim \frac{\chi(z)}{\Pi(z)} = 1 \qquad \lim \frac{\chi(-z)}{\Pi(-z)} e^{z(x_1-x)} = 0$$

Si $f(\mu)$ est discontinue, mais finie, pour $\mu = x$, on aurait dans le 1er développement la valeur : $f(x-\eta)$ dans le 2e : $f(x+\eta)$, et dans le développement total, la valeur moyenne :

$$\frac{f(x-\eta) + f(x+\eta)}{2}$$

Nous allons donner quelques exemples de ces développements ; la série de Fourier en est le cas particulier le plus important.

Série de Fourier. Prenons : $\psi(z) = -1$ $\quad \chi(z) = e^{az}$ $\quad a > 0$

et par conséquent : $\Pi(z) = e^{az} - 1$.

Voyons si les conditions précédentes sont vérifiées. Les racines de l'équation : $\Pi(z) = 0$ $\quad e^{az} = 1$ sont : $z = \dfrac{2k\pi i}{a}$ $\quad k = 1, 2, 3 \ldots\ldots$

On prendra pour valeurs successives des rayons : $\dfrac{(2n+1)\pi}{a}$ $\quad n = 1, 2, 3 \ldots$ afin d'éviter les racines de Π, ou pôles de $\mathcal{F}(z)$.

$$\frac{\psi(-z)}{\Pi(-z)} = \frac{-1}{e^{-az} - 1}$$

Si z augmente indéfiniment en dehors de Oy, e^{-az} tend vers 0, et le rapport vers 1.

Si z tend vers l'infini suivant Oy, comme il prend seulement les valeurs : $\dfrac{(2n+1)\pi i}{a}$, on a : $e^{-az} = -1$ donc :

$$\lim \frac{\psi(-z)}{\Pi(-z)} = \frac{1}{2} \quad \text{limite finie -}$$

$$\frac{\psi(z)}{\Pi(z)} e^{z(x-x_0)} = \frac{-e^{z(x-x_0)}}{e^{az} - 1} = \frac{-e^{z(x-x_0-a)}}{1 - e^{-az}}$$

Si l'on a : $x < x_0 + a$, la limite sera 0 quand z suivra une direction différente de Oy. Si z est sur Oy, on a au numérateur $e^{\frac{x-x_0-a}{a}}$ quantité fixe, et au dénominateur 2 ; la limite est donc finie.

$$\frac{\chi(z)}{\Pi(z)} = \frac{e^{az}}{e^{az} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-az}}$$

Mêmes limites que pour $\dfrac{\psi(-z)}{\Pi(-z)}$, c.à.d. 1 — en général, et $\dfrac{1}{2}$ pour z sur Oy

$$\frac{\chi(-z)}{\Pi(-z)} e^{z(x_1-x)} = \frac{e^{-az}}{e^{-az} - 1} \times e^{z(x_1-x)} = \frac{e^{z(x_1-x-a)}}{e^{-az} - 1}$$

Si l'on a : $x_1 < x + a$, la limite sera 0 si z est en dehors de Oy, elle restera finie si z est sur Oy. Rapprochons cette condition de la précédente : $x < x_0 + a$ $\qquad x_0 + a > x > x_1 - a$

Prenons pour simplifier : $x_0 = 0$, $\quad x_1 = a$; on doit avoir :

$0 < x < a$ $\qquad$ Si cette double inégalité est satisfaite, les 4 conditions sont remplies. On aura le développement en série trigonométrique qui s'appelle la formule de Fourier ; calculons :

$$\frac{\psi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} = \frac{-1}{ae^{a\lambda}} = \frac{-1}{a} \quad \left(e^{2k\pi i} = 1\right) \quad \text{de même : } \frac{\chi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} = \frac{e^{a\lambda}}{ae^{a\lambda}} = \frac{1}{a} \text{ ; d'où :}$$

$$f(x) = \frac{1}{a}\sum e^{\frac{2k\pi i . x}{a}}\int_0^a e^{-\frac{2k\pi i . \mu}{a}} f(\mu)\, d\mu$$

k prenant toutes les valeurs entières, positives et négatives. Groupons les termes égaux et de signes contraires ; on aura :

$$\frac{1}{2}\left[e^{\frac{2k\pi i}{a}(x-\mu)} + e^{-\frac{2k\pi i}{a}(x-\mu)}\right] = \cos\frac{2k\pi}{a}(x-\mu)$$

sauf pour $k = 0$, où l'on a simplement 1 ; ce qui donne :

$$f(x) = \frac{1}{a}\int_0^a f(\mu)\, d\mu + \sum_{k=1}^{k=\infty}\int_0^a \cos\frac{2k\pi}{a}(x-\mu)\, f(\mu)\, d\mu$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty}\left[a_k \cos\frac{2k\pi x}{a} + b_k \sin\frac{2k\pi x}{a}\right]$$

Cette fonction est continue dans l'intervalle $(0, a)$ et admet la période a ; on peut prendre les intégrales dans n'importe quel intervalle de longueur a. Seulement, ~~$f(0)$ et~~ $f(x)$ est discontinue en $0, a, 2a \ldots$ car elle a en ces points à la fois les 2 valeurs $f(0)$ et $f(a)$ qui

coïncident. Si l'on fait $x = a$ dans la série trigonométrique, on trouve la valeur moyenne : $\dfrac{f(0) + f(a)}{2}$

Autre exemple : Prenons : $\Pi(z) = z(e^{az} + e^{-az}) + h(e^{az} - e^{-az})$

$$\chi(z) = e^{az}(z+h) \qquad \psi(z) = e^{-az}(z-h)$$

a et h étant des quantités fixes essentiellement positives.

On prendra pour $r_1\, r_2 \ldots\ldots r_n \ldots\ldots$ des valeurs telles que sur le cercle de rayon r_n la fonction $\Pi(z)$ ne s'annule jamais ; pour cela, il suffira de poser : $r_n = \dfrac{n\pi}{a}$

Sur Oy, $z = \dfrac{n\pi i}{a}$ $\quad 2az = 2n\pi i \quad$ donc $e^{2az} = 1$.

$\Pi(z)$ ne s'annule donc pas sur les cercles de rayon $r_1\, r_2 \ldots\ldots r_n \ldots\ldots$

Vérifions maintenant les conditions imposées à ψ, χ et π.

$$\frac{\psi(-z)}{\Pi(-z)} = \frac{e^{az}(-z-h)}{e^{-az}(-z+h) + e^{az}(-z-h)} = \frac{1}{1 + e^{-2az}\dfrac{z-h}{z+h}}$$

e^{-az} tend vers 0 quand z augmente indéfiniment ; donc le rapport précédent tend vers 1. — Cela n'a pas lieu sur Oy : mais en faisant $z = yi$, on voit que le quotient tend vers la limite finie $\dfrac{1}{2}$.

On prouve de même que : $\quad \lim \dfrac{\chi(z)}{\Pi(z)} = 1$

D'autre part :

$$\frac{\psi(z)}{\Pi(z)}\, e^{z(x-x_0)} = \frac{e^{-az}(z-h)\, e^{z(x-x_0)}}{e^{az}(z+h) + e^{-az}(z-h)} = \frac{e^{z(x-x_0-2a)}(z-h)}{(z+h) + e^{-2az}(z-h)}$$

Ce rapport a pour limite 0 à la condition : $\quad x < x_0 + 2a$.

$$\frac{\chi(-z)}{\Pi(-z)}\, e^{z(x_1-x)} = \frac{e^{-az}(-z+h)\, e^{z(x_1-x)}}{e^{-az}(-z+h) + e^{az}(-z-h)} = \frac{e^{z(x_1-x-2a)}(-z+h)}{e^{-2az}(-z+h) + (-z-h)}$$

ce rapport a pour limite 0 à la condition : $\quad x > x_1 - 2a$

On a donc la double condition : $x_1 - 2a < x < x_0 + 2a$.

Posons : $x_0 = -a$, $x_1 = +a$: $-a < x < +a$.

Ainsi x doit rester compris dans l'intervalle (x_0, x_1) d'étendue $2a$.

Reste à trouver les racines de l'équation transcendante : $\Pi(z) = 0$.

Faisons le changement de variables : $az = ix$

l'équation devient : $\frac{ix}{a}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) + h\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = 0$

Or : $tg x = \frac{1}{i} \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}}$ $\frac{ix}{a} + hi\, tg x = 0.$

$x + ah\, tg x = 0$ ou : $tg x + Hx = 0$ $H > 0.$ $\left(\frac{1}{ah}\right)$

Telle est l'équation : $\Pi(z) = 0$, sous sa forme la plus simple, que Fourier a rencontrée et étudiée dans la théorie de la chaleur.

On va prouver qu'elle n'a que des racines réelles, et qu'elle en a un nombre infini. — Faisons la substitution : $x = \alpha + \beta i$

L'équation devient : $\frac{\sin(\alpha + \beta i)}{\cos(\alpha + \beta i)} + H(\alpha + \beta i) = 0$

$\frac{\sin(\alpha + \beta i)\cos(\alpha - \beta i)}{\mathrm{mod}^2\left[\cos(\alpha + \beta i)\right]} + H(\alpha + \beta i) = 0$ On a au numérateur :

$(\sin\alpha \cos\beta i + \cos\alpha \sin\beta i)(\cos\alpha\cos\beta i + \sin\alpha \sin\beta i) = \sin\beta i \cos\beta i = \frac{1}{2}\sin 2\beta i$

Égalons séparément à 0 la partie imaginaire du 1er membre :

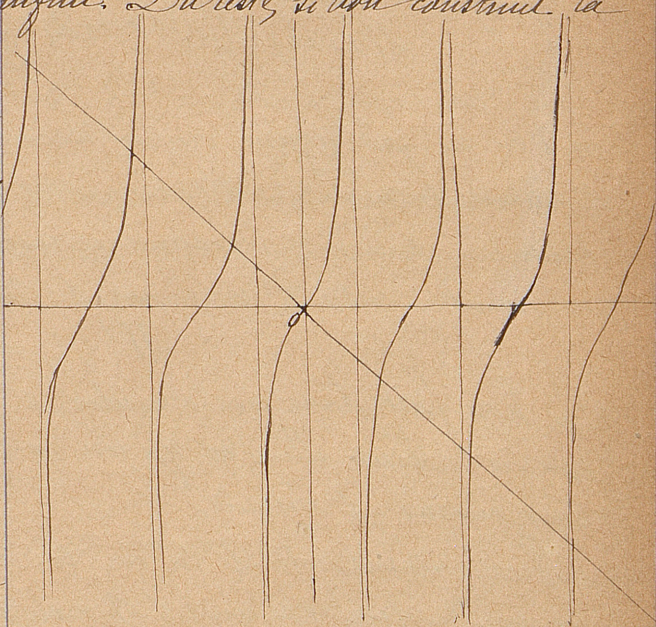
$\frac{\frac{1}{2}\sin 2\beta i}{\mathrm{mod}^2\left[\cos(\alpha + \beta i)\right]} + H\beta i = 0$ équation réelle, i étant facteur.

Or cette égalité est impossible, car $H > 0$:

$\frac{\sin 2\beta i}{2\beta i}$ devrait être négatif, ce qui ne se peut, car on a :

$\frac{\sin \alpha i}{\alpha i} = 1 + \frac{\alpha^2}{3!} + \frac{\alpha^4}{5!} + \cdots$ essentiellement positif.

On doit donc avoir : $\beta = 0$, c.à.d. qu'il n'y a pas de racine imaginaire.
D'ailleurs l'équation a une infinité de racines réelles, car $\Pi(z)$ a une infinité de termes et un degré infini. Du reste, si l'on construit la courbe : $y = tg\,x$



elle a une infinité de branches comprises entre les asymptotes $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, ... $\frac{(2K+1)\pi}{2}$, et elle a une infinité de points d'intersection avec la droite : $y = -Hx$
Chaque point d'intersection est compris entre 2 asymptotes, et tend vers une des asymptotes quand K croît indéfiniment. Ainsi les racines de $\Pi(z) = 0$ sont séparées.

On a alors pour une fonction continue de la variable réelle x, $f(x)$, pour les valeurs de x comprises entre $-a$ et $+a$, le développement en série : $f(x) = \Sigma A e^{\lambda x}$ λ racine de l'équation : $\Pi(z) = 0$.
Posons : $z = \zeta i$ $f(x) = \Sigma A e^{\lambda i x}$ λ racine de l'équation : $\Pi(\zeta i) = 0$,
ou $\zeta \cos a\zeta + h \sin a\zeta = 0$
équation qui a toutes ses racines réelles. Quant aux coefficients A, on les trouve par la formule générale ; on a ainsi, en faisant $z = \zeta i$, la série trigonométrique : $f(x) = \Sigma (A \cos a\lambda + B \sin a\lambda)$
analogue à la série de Fourier, si ce n'est que λ, au lieu d'être un multiple d'un arc, est une racine d'une équation transcendante :
$\Pi(\zeta i) = 0$.

Ces racines étant égales et de signes contraires deux à deux, on peut les grouper, en mettant à part la racine $\lambda = 0$, et l'on obtient le développement :

$$f(x) = \frac{h}{2(1+ah)}\int_{-a}^{+a} f(\mu)\,d\mu + \Sigma\, \frac{2\lambda}{2a\lambda - \sin 2a\lambda}\int_{-a}^{+a} \cos\lambda(x-\mu)\, f(\mu)\,d\mu$$

où l'on ne fait figurer que les racines positives. Le : $\cos\lambda x$ peut d'ailleurs sortir de l'intégrale avec $\sin\lambda x$, et l'on aura une série ordonnée suivant les sinus et cosinus de x multiplié, non plus par un nombre entier, mais par les racines positives de l'équation :

$$\Pi(\zeta i) = 0.$$

Si l'on fait dans ces formules : $h = \infty$, on retrouve la série de Fourier. Ainsi elle n'est qu'un cas particulier du développement que nous venons d'obtenir.

Il est intéressant de savoir comment Fourier a été conduit à trouver ce développement. Il a étudié le problème du refroidissement d'une sphère homogène.

Étant donné un système isotrope (où la chaleur se communique uniformément) on représente la température de chaque point par une fonction :

$$V(x, y, z, t) = 0$$

de la position de ce point et du temps ; cette fonction doit satisfaire à la condition analytique :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$$

Cette fonction se détermine par les conditions aux limites ; on se donne l'état initial du corps, c.à.d. la valeur de V en chaque point pour $t = 0$:

$$V(x, y, z, 0) = F(x, y, z)$$

On suppose le corps plongé dans un milieu indéfini de température fixe, 0° par exemple ; la déperdition de chaleur, qui a lieu par la surface, est

déterminé par la loi de Newton : $\frac{dV}{dn} = -hV$

$\frac{dV}{dn}$ désignant la dérivée prise suivant la normale intérieure ; d'où l'équation : $\frac{dV}{dn} + hV = 0$

qui doit être vérifiée en tous les points de la surface et pour toutes les valeurs du temps.

Dans le cas d'une sphère pleine, on admet que la température est la même sur toute sphère intérieure concentrique, de sorte que la température est seulement fonction du temps et de la distance du point au centre pris pour origine ; $V(r,t)$ $\qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

L'équation différentielle devient : $\frac{\partial V}{\partial t} = K\left(\frac{\partial V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right)$

L'équation à la surface devient :

$\frac{dV}{dr} + hV = 0$ Elle doit être vérifiée pour ; $r = R$.

Enfin l'équation à la limite devient ; $V(r,0) = F(r)$.

$F(r)$ donnant la température initiale de toutes les sphères concentriques, r variant de 0 à R. Telles sont les données du problème analytique que Fourier avait à résoudre.

Posons d'abord ; $y = Vr$ $\qquad$ l'équation différentielle se réduit à :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$$

Fourier cherche des solutions simples de cette équation différentielle au moyen desquelles il formera ensuite l'intégrale générale. Pour cela, on pose ; $y = e^{-km^2t} \times u$ $\qquad$ u ne dépendant que de r ;

$-km^2u = k\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ $\qquad$ d'où ; $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + m^2 u = 0$

Cette équation différentielle admet la solution : $u = A\cos mr + B\sin mr$

A et B étant des constantes arbitraires d'intégration.

On obtient ainsi la solution particulière: $y = (A\cos mr + B\sin mr)e^{-km^2t}$ valable quelles que soient les constantes A, B et m. On aura la fonction cherchée par la formule: $V = \frac{y}{r}$

Or on ne doit pas conserver dans la solution particulière le cosinus, car alors V deviendrait infini pour $r = 0$, ce qui est physiquement impossible; on fera donc: $A = 0$. On a donc la solution particulière:

$$V = \frac{e^{-km^2t}\sin mr}{r}$$ la constante m étant quelconque.

Mais on peut choisir m de manière que V vérifie l'équation à la surface. Portons les valeurs de V et de $\frac{dV}{dr}$ dans cette équation, le temps disparaît; faisons $r = R$; il vient:

$$\operatorname{tg} mR + \frac{mR}{hR-1} = 0$$ nous supposerons: $hR > 1$,

ce qui revient à faire R suffisamment grand. C'est une équation où R est une donnée, et m l'inconnue. Elle a une infinité de racines, donc il y a une infinité de solutions V qui satisfont l'équation à la surface; prenons seulement les racines positives: $m_1\ m_2 \ldots m_n \ldots$ Elles donnent autant de solutions particulières de V; ajoutons-les en les multipliant par des coefficients constants:

$$V = A_1 \frac{e^{-km_1^2t}\sin m_1 r}{r} + A_2 \frac{e^{-km_2^2t}\sin m_2 r}{r} + \ldots\ldots$$

Si cette série est convergente, ce sera encore une solution de l'équation à la surface. Nous allons chercher à déterminer les coefficients A de telle sorte que, $F(r)$ étant la fonction donnée pour état initial, on ait le développement, pour $t = 0$:

$$r F(r) = A_1 \sin m_1 r + A_2 \sin m_2 r + \ldots\ldots$$

Or ce développement est précisément celui que nous venons d'obtenir;

c'est une série convergente ordonnée suivant les sinus de r multipliés par les racines successives de l'équation transcendante : $tg\,x + Hx = 0$.
Remarquons que cette série ne contient que des sinus. Mais si l'on pose :
$\varphi(r) = rF(r)$ pour r compris entre 0 et R, et :
$\varphi(-r) = -\varphi(r)$, on pourra développer $\varphi(r)$ en une série qui doit, a priori, contenir des sinus et des cosinus (car on y fait figurer toutes les racines, tant positives que négatives, de l'équation à la surface). Mais puisque φ est une fonction impaire (changeant de signe avec r) elle ne peut contenir de cosinus. Donc on pourra appliquer les formules précédemment trouvées à $\varphi(r)$, fonction définie dans l'intervalle $(-R, +R)$, et on aura le même développement que pour $rF(r)$ où r était supposé positif ; on connaîtra ainsi les coefficients successifs $A_1, A_2, \ldots$ etc. Pour avoir la série qui donne V à un instant quelconque, il suffira de diviser tous les termes par r, et de multiplier chacun d'eux par e^{-km^2t}, ce qui ne peut que les diminuer, et ne trouble pas la convergence de la série.
Ainsi la solution générale V se compose de la série des solutions simples multipliées par des coefficients convenables qui sont ceux du développement trigonométrique que nous venons d'étudier.

Fonctions analytiques de 2 variables complexes.

Nous avons défini précédemment l'intégrale double :

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

étendue à une aire fermée quelconque du plan des xy ; $f(x,y)$ étant la valeur de la fonction f dans le rectangle infiniment petit $dx\,dy$, et dx, dy étant essentiellement positifs. Faisons le changement de variables : $x = \varphi(u,v)$ $y = \psi(u,v)$

et supposons qu'il y ait correspondance uniforme entre les points de l'aire C du plan des (xy) et les points de l'aire Γ du plan des (uv). Le déterminant fonctionnel :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}$$

ne s'annulera pas et gardera par suite un signe invariable dans toute l'étendue des 2 aires correspondantes. On aura alors :

$$dx\,dy = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\,du\,dv$$

et l'intégrale deviendra : $\displaystyle\iint f(\varphi,\psi)\,\varepsilon\,\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\,du\,dv$

ε étant le facteur ± 1, choisi tel que : $\varepsilon\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)} > 0$,

de manière à rendre l'élément différentiel constamment positif comme dans l'intégrale précédente. — Telles sont les conditions et les règles du changement de variables dans les intégrales multiples ; nous nous bornons à les rappeler.

On sait comment s'exprime l'aire d'une surface courbe limitée par

un contour fermé C. Soit Γ la projection de ce contour sur le plan des xy ; ~~les projections~~ soit γ l'angle aigu que fait l'élément superficiel de C avec le plan des xy ~~l'axe des z~~. Supposons que $\cos\gamma$ ne devienne jamais nul, et par suite conserve le même signe dans toute l'aire C ; de sorte que chaque élément plan $dx\,dy$ dans Γ corresponde à un seul élément superficiel de C ; ce dernier élément aura pour expression :

$\dfrac{dx\,dy}{\cos\gamma}$ quantité constamment finie et positive ;

et l'aire C aura pour expression l'intégrale double :

$$\iint \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}$$

parfaitement déterminée, étendue à l'aire plane Γ.

Cherchons ce que devient l'élément de surface : $\dfrac{dx\,dy}{\cos\gamma} = d\sigma$ quand on ~~fait le chang~~ exprime les coordonnées de la surface en fonction de 2 paramètres u, v : on a alors :

$$dx\,dy = \varepsilon \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv \qquad (\varepsilon \text{ déterminé comme ci-dessus})$$

Pour calculer le $\cos\gamma$, nous considérerons les 2 familles de courbes :

$v = \text{const.}$ $\qquad u = \text{const.}$

tracées sur la surface C ; la tangente à l'une des courbes de la 1re famille a pour paramètres directeurs : $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}$

et la tangente à l'une des courbes de la 2e : $\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$

La normale à l'élément superficiel $d\sigma$ fait avec l'axe des z l'angle γ, et les angles α, β avec les axes Ox, Oy ; écrivons qu'elle est perpendiculaire aux tangentes aux 2 courbes précédentes :

$$\cos\alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \cos\beta \frac{\partial y}{\partial u} + \cos\gamma \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \qquad \cos\alpha \frac{\partial x}{\partial v} + \cos\beta \frac{\partial y}{\partial v} + \cos\gamma \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

d'où la proportion : $\dfrac{\cos\alpha}{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}} = \dfrac{\cos\beta}{\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}} = \dfrac{\cos\gamma}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$

On a donc :
$$\cos\gamma = \frac{\varepsilon \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}}$$

on a multiplié par ε (défini plus haut) pour avoir $\cos\gamma > 0$; en prenant d'ailleurs la valeur arithmétique (positive) du radical. Ainsi l'élément superficiel $d\sigma$ a pour expression :
$$d\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, du\, dv.$$

Cette formule est générale et sans restrictions, car $\cos\gamma$ et ε ont disparu ; il ne reste qu'une condition, la correspondance uniforme entre les points de la surface courbe et ceux du plan des (u,v) pour tous les points de l'aire C.

Considérons maintenant l'intégrale : $\iint C\, dx\, dy$

où C est une fonction de x, y, z, étendue à une certaine aire d'une surface courbe. Faisons : $dx\,dy = \cos\gamma\, d\sigma$

l'intégrale devient : $\iint C \cos\gamma\, d\sigma$

Mais ici $\cos\gamma$ peut avoir un signe quelconque, et $dx\,dy$ aussi ($d\sigma$ étant considéré comme essentiellement positif.) En effet, on peut distinguer les 2 côtés de la surface, et les normales dirigées d'un côté ou de l'autre ; sur un côté, $\cos\gamma$ a un signe constant (en supposant qu'il ne s'annule pas dans l'aire considérée.) Donc l'intégrale sera

parfaitement déterminé $C \cos\gamma \, d\sigma$ étant déterminé en tous les éléments de l'aire. Si l'on prend l'intégrale sur l'autre face, on a la même valeur avec un signe contraire, puisque $\cos\gamma$ aura partout changé de signe. Si l'on convient de prendre les intégrales sur un côté de la surface, on a sans ambiguïté de signe :

$$\iint C\,dx\,dy = \iint C \cos\gamma \, d\sigma \qquad \text{et de même :}$$

$$\iint A\,dy\,dz = \iint A \cos\alpha \, d\sigma \qquad \iint B\,dz\,dx = \iint B \cos\beta \, d\sigma$$

et, en faisant la somme, qui se rencontre fréquemment :

$$\iint (A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy) = \iint \left[A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma\right] d\sigma.$$

Cette intégrale prend une forme intéressante quand x, y, z sont fonctions de 2 paramètres u, v ; on a alors :

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{}}, \quad \cos\gamma = \frac{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{}}$$

les 3 cosinus devant contenir le même facteur ε c.à.d avoir simultanément le signe + ou le signe −. Prenons par exemple le signe + ; si l'on prenait le signe −, l'intégrale ne ferait que changer de signe. On y substituera les valeurs des 3 cosinus et de $d\sigma$, et on aura :

$$\iint \left[A \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + B \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + C \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] du\,dv$$

intégrale double étendue à toute l'aire Γ qui dans le plan des (u,v) correspond à l'aire C. – Cette formule est très générale, de la manière dont nous venons de l'établir, car il suffit qu'il y ait correspondance uniforme entre chaque point (u,v) du plan et chaque point (x,y,z)

de la portion de surface considérée ; ce qui peut avoir lieu sans qu'il ait correspondance uniforme entre cette surface et chacune de ses 3 projections sur les plans coordonnés, c.à.d. sans qu'on ait séparément :

$$dx\,dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv \qquad dy\,dz = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,du\,dv \qquad dz\,dx = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,du\,dv.$$

On connaît à quelles conditions l'intégrale curviligne :

$$\int (P\,dx + Q\,dy)$$

prise sur une courbe plane entre 2 points fixes est indépendante du chemin suivi de l'un à l'autre de ces points. La même question se pose pour l'intégrale de surface :

$$\iint A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy$$

prise sur une surface limitée par un contour fermé fixe C. On peut en effet faire passer une infinité de surfaces par cette courbe C ; on peut faire correspondre le côté de l'une à un côté de l'autre, de manière à pouvoir les amener à coïncider par des déformations continues, et prendre l'intégrale double sur le côté correspondant de chacune d'elles. Cherchons les conditions pour lesquelles cette intégrale sera la même sur toutes les surfaces passant par le contour C, au moins sur celles comprises dans une certaine région de l'espace.

Pour cela, nous allons démontrer une transformation analogue à celle d'une intégrale double en intégrale curviligne, et prouver qu'on peut remplacer l'intégrale triple :

$$\iiint \left[\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz$$

étendue à un volume limité par une surface fermée S, par une intégrale double ~~de surface~~ étendue à la surface S.

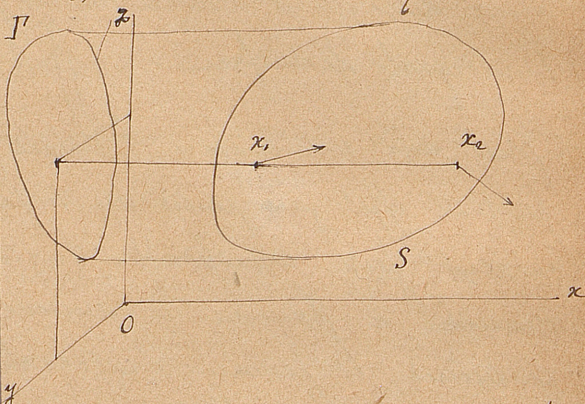
Si l'on fait y et z constants, on peut écrire :

$$\iiint \frac{\partial A}{\partial x}\, dx\,dy\,dz = \iint dy\,dz \int \frac{\partial A}{\partial x}\, dx$$

Or, pour un système de valeurs de y, z, on a 2 points x correspondants sur la surface fermée S (en la supposant convexe); soient x_1, x_2; alors : $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial A}{\partial x}\, dx = A_2 - A_1$ et il reste : $\iint dy\,dz\,(A_2 - A_1)$

D'autre part, considérons l'intégrale : $\iint A\, dy\,dz$ étendue à la surface S sur le côté extérieur ; elle sera identique à :

$$\iint A \cos\alpha\, d\sigma$$



Or pour tous les points x_2, $\cos\alpha > 0$, donc l'intégrale prise en ces points sera :

$$\iint A_2\, dy\,dz$$

Pour tous les points x_1, $\cos\alpha < 0$, l'intégrale prise en ces points sera :

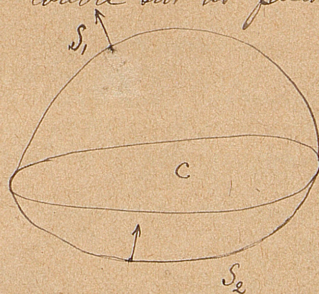
$\iint A_1 \cos\alpha\, d\sigma = -\iint A_1\, dy\,dz$ en conservant à $dy\,dz$ sa signification positive. Or la surface S est la somme des points x_1 et x_2 correspondant aux points (yz) contenus dans sa projection Γ sur le plan des $(y\,z)$; donc $\iint_S A\, dy\,dz = \iint_\Gamma dy\,dz\,(A_2 - A_1)$ et par suite :

$$\iiint \frac{\partial A}{\partial x}\, dx\,dy\,dz = \iint_S A\, dy\,dz$$

et, en ajoutant 3 égalités semblables : $\iiint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz = \iint_S \left[A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy \right]$

intégrale étendue à la face extérieure de la surface S.

Revenons à la question posée tout à l'heure et considérons 2 surfaces S_1, S_2 passant par le même contour fermé C ; elles délimitent un certain volume V. Pour prendre l'intégrale double sur les faces correspondantes de S_1 et de S_2, on devra la prendre sur la face extérieure de S_1, par exemple, et sur la face intérieure de S_2, ce qui revient à changer le signe de cette dernière.



Pour que les 2 intégrales sur S_1, S_2 soient égales, il faut que l'intégrale totale prise sur la surface $(S_1 + S_2)$ du côté extérieur soit nulle. Or cette intégrale : $\iint \left[A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy \right]$ est égale, on vient de voir, à une intégrale triple étendue au volume V ; on doit donc avoir :

$$\iiint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz = 0$$

et pour que cette intégrale soit nulle quelle que soit la surface fermée passant par C, il faut que : $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$

Cette condition nécessaire est également suffisante.

Remarquons que dans le cas de 2 variables, la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

offre un changement de signes, tandis qu'il n'y en a pas dans le cas de 3 variables ; mais l'alternance des signes reparaît dans le cas de 4 variables.

L'intégrale de surface que nous venons de considérer ne sera pas nécessairement nulle, quand la surface enfermera des points où les fonctions A, B, C cessent d'être continues et déterminées. Dans ce cas, on peut

déformer la surface d'une manière continue sans la faire passer par un point singulier ; l'intégrale ne changera pas de valeur — En général toutes les propriétés que nous avons démontrées pour les contours dans le plan subsistent pour les surfaces dans l'espace, puisque le théorème fondamental relatif à l'intégrale nulle est établi pour celles-ci.

Signalons 2 cas particuliers intéressants de la formule précédente.

Supposons d'abord $A = x, \quad B = y, \quad C = z.$ On a :

$$3\iiint dx\,dy\,dz = \iint (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$$

ou

$$V = \frac{1}{3}\iint_S (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$$

Ainsi le volume contenu dans une surface fermée peut s'exprimer par une intégrale double prise sur le côté extérieur de cette surface.

Supposons ensuite : $A = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial V}{\partial z}.$

V étant une fonction de x, y, z. La formule devient :

$$\iiint\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz = \iint\left(\frac{\partial V}{\partial x} dy\,dz + \frac{\partial V}{\partial y} dz\,dx + \frac{\partial V}{\partial z} dx\,dy\right)$$

ou

$$\iiint \Delta V\,dx\,dy\,dz = \iint\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma\right] d\sigma.$$

Or α, β, γ étant les angles que fait avec les axes la normale extérieure à la surface fermée, on a : $\frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma = \frac{dV}{dn}$ dérivée de la fonction V suivant la direction de la normale extérieure ; donc :

$$\iiint \Delta V\,dx\,dy\,dz = \iint \frac{dV}{dn}\,d\sigma.$$

Si la fonction V satisfait à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, on aura identiquement :

$$\iint \frac{dV}{dn}\,d\sigma = 0.$$

Application. On a vu, dans le problème du refroidissement d'un corps, que la température d'un point : $V(x, y, z, t)$
satisfait l'équation différentielle : $\Delta V = H \frac{\partial V}{\partial t}$.

Voici comment on déduit analytiquement cette relation de la loi physique. Fourier a tiré de la loi de Newton cette conséquence, que la quantité de chaleur qui passe dans un laps de temps dt à travers un élément de surface $d\sigma$ est proportionnelle à la dérivée : $\frac{dV}{dn}$
de la température suivant la normale intérieure. Comme ce passage a lieu en sens inverse de cette normale (suivant laquelle la température croît) cette quantité de chaleur a pour expression : $-k\frac{dV}{dn}dt\,d\sigma$.

Nous allons évaluer de 2 manières différentes la quantité de chaleur qui ~~traverse~~ en entrant la surface fermée S ; d'après ce qui vient d'être dit, elle aura pour expression :
$$\iint k\frac{dV}{dn}dt\,d\sigma = kdt\iint \frac{dV}{dn}d\sigma.$$

D'autre part, considérons un point quelconque (x, y, z) de l'intérieur ; dans le laps dt, sa température s'est élevée de : $\frac{\partial V}{\partial t}dt$
Soit C la chaleur spécifique du corps, D son poids spécifique (le corps étant supposé homogène) ; la quantité de chaleur acquise par le corps sera
$$\iiint C\frac{\partial V}{\partial t}dt.\,D\,dxdydz = CDdt\iiint \frac{\partial V}{\partial t}dxdydz$$

Egalons ces 2 expressions de la quantité de chaleur gagnée par le corps :
$$k\iint \frac{dV}{dn}d\sigma = CD\iiint \frac{\partial V}{\partial t}dxdydz$$ ou, en posant : $\frac{CD}{k} = H$,
$$\iiint\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - H\frac{\partial V}{\partial t}\right]dxdydz = 0.$$

Cette égalité devant avoir lieu identiquement, il faut que l'élément différentiel



soit constamment nul, c.à.d. qu'on ait : $\Delta V = H \frac{\partial V}{\partial t}$ c.q.f.d.

Considérons la fonction : $V = \frac{1}{r}$ $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Il est aisé de voir qu'elle vérifie l'équation : $\Delta V = 0$.

On a donc : $\iint \frac{dV}{dn} d\sigma = 0$

sur toute surface fermée n'entourant pas l'origine, où $V = \infty$.

Ramenons cette intégrale à sa forme primitive explicite :

$$\iint \left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma\right] d\sigma = \iint \frac{\partial V}{\partial x} dydz + \frac{\partial V}{\partial y} dzdx + \frac{\partial V}{\partial z} dxdy$$

Or : $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$ $\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}$ $\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$

L'intégrale devient : $\iint \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$.

et elle satisfait à la condition d'intégrabilité : $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$,

car celle-ci revient à : $\Delta V = 0$.

Cherchons maintenant quelle valeur prend l'intégrale précédente prise sur une surface qui enferme l'origine. On sait qu'on peut déformer cette surface de n'importe quelle manière, pourvu qu'elle ne franchisse jamais le point O ; la valeur de l'intégrale ne changera pas. Nous allons prendre en particulier la sphère de centre O et de rayon 1, et évaluer l'intégrale prise sur sa face extérieure. Dans ce cas : $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Or, on a en vertu d'une formule précédente :

$\iint (xdydz + ydzdx + zdxdy) = 3V = 4\pi$ car : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Ainsi, en général, la valeur de l'intégrale double

$$\iint \frac{XdYdZ + YdZdX + ZdXdY}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

prise sur une surface quelconque enfermant l'origine, est : 4π.

Transformons maintenant cette intégrale en faisant le changement de variables : $X = f(x, y, z)$ $Y = \varphi(x, y, z)$ $Z = \psi(x, y, z)$

On suppose que ces 3 fonctions s'annulent pour le système $(x_0\ y_0\ z_0)$ de sorte qu'au point : $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ correspond le point : $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. On suppose en outre que les ~~système~~ valeurs $(x_0\ y_0\ z_0)$ soit une solution simple du système : $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, c à d qu'au point $(x_0\ y_0\ z_0)$ on a : $\dfrac{\partial(f, \varphi, \psi)}{\partial(x, y, z)} \gtrless 0$.

Enfin on suppose qu'il y ait correspondance uniforme entre les points (X, Y, Z) et (x, y, z) au voisinage des 2 p. (O) et $(x_0\ y_0\ z_0)$.

Considérons une surface S entourant le p. O ; il lui correspondra une surface s enfermant le point $(x_0\ y_0\ z_0)$; à l'intégrale prise sur S dans l'espace (XYZ) correspondra une intégrale prise sur s dans l'espace (xyz). Supposons que les 2 surfaces puissent s'exprimer en fonction de 2 paramètres u, v ; l'intégrale précédente deviendra :

$$\iint \frac{X\dfrac{\partial(YZ)}{\partial(uv)} + Y\dfrac{\partial(ZX)}{\partial(uv)} + Z\dfrac{\partial(XY)}{\partial(uv)}}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}\, du\, dv$$

Évaluons les déterminants fonctionnels qui figurent au numérateur en fonction de x, y, z et de leurs dérivées par rapport à u, v :

$$\frac{\partial(YZ)}{\partial(uv)} = \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u} =$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$= \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(xy)}\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(yz)}\frac{\partial(yz)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(zx)}\frac{\partial(zx)}{\partial(uv)}$$

De même : $$\frac{\partial(ZX)}{\partial(uv)} = \frac{\partial(\psi f)}{\partial(xy)}\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(\psi f)}{\partial(yz)}\frac{\partial(yz)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(\psi f)}{\partial(zx)}\frac{\partial(zx)}{\partial(uv)}$$

$$\frac{\partial(XY)}{\partial(uv)} = \frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)}\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(f\varphi)}{\partial(yz)}\frac{\partial(yz)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(f\varphi)}{\partial(zx)}\frac{\partial(zx)}{\partial(uv)}$$

Si nous substituons ces expressions dans l'intégrale, on aura une forme linéaire en $\frac{\partial(x,y)}{\partial(uv)}$ $\frac{\partial(yz)}{\partial(uv)}$ $\frac{\partial(zx)}{\partial(uv)}$; le coefficient de $\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)}$ sera :

$$X\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(xy)} + Y\frac{\partial(\psi f)}{\partial(xy)} + Z\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)} = \begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \psi & \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = C$$

Le coefficient de $\frac{\partial(yz)}{\partial(uv)}$ sera :

$$\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \psi & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} = A$$

et celui de $\frac{\partial(zx)}{\partial(uv)}$:

$$\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \psi & \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{vmatrix} = B.$$

L'intégrale double deviendra donc :

$$\iint \frac{A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy}{(f^2+\varphi^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Elle est l'intégrale transformée en (xyz). Elle remplit la condition d'intégrabilité, car elle a été tirée par un simple changement de variables d'une intégrale qui remplissait cette condition. Si la surface fermée S suivant laquelle on la prend ne contient aucun point où f, φ, ψ s'annulent à la fois, l'intégrale sera nulle comme celle dont on l'a tirée. Il est donc à présumer que la valeur qu'elle prend sur une surface quelconque dépend du nombre des racines du système $\begin{cases} f=0 \\ \varphi=0 \\ \psi=0 \end{cases}$

contenues à l'intérieur de cette surface. Nous allons calculer cette valeur. On suppose que les racines contenues à l'intérieur de la surface S sont simples c.à.d que le déterminant fonctionnel des 3 équations ne s'annule pas pour ces racines. Soient ces racines représentées par les points $A_1\ A_2\ A_3\ldots$ à l'intérieur de S. L'intégrale prise suivant S est égale à la somme des intégrales qu'on prendrait sur des surfaces fermées quelconques entourant chacune 1 racine: car on peut par des déformations permises réduire la surface S à ces surfaces isolées, en nombre égal aux racines – Nous n'avons donc qu'à considérer une de celles-ci, et à évaluer l'intégrale de surface prise sur elle – Pour simplifier, nous prendrons le point-racine pour origine, par un transport d'axes. Supposons que les 3 fonctions f, φ, ψ soient développables par la formule de Taylor au voisinage de cette racine (du point O):

$$f = ax + by + cz + \ldots \qquad \varphi = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots \qquad \psi = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots$$

et que le déterminant fonctionnel n'est pas nul (hypothèse générale):

$$D = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Nous ne changerons pas la valeur de l'intégrale si nous réduisons les 3 fonctions à leurs termes du 1er degré; en effet, on peut la prendre sur une sphère de centre O et de rayon ρ aussi petit qu'on veut; la partie principale composée des termes du 1er degré, sera indépendante de ρ, car elle sera infiniment petite avec ρ; les autres termes seront infiniment petits par rapport à ρ, et par conséquent ils sont nuls, car on sait que l'intégrale est indépendante de ρ. Nous avons en somme à évaluer

$$\frac{1}{4\pi} \iint \frac{A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Le dénominateur se réduit à :

$$\left[(ax+by+cz)^2+(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

Au numérateur : $A = \begin{vmatrix} ax+by+cz & b & c \\ a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & b & c \\ a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$$A = Dx \qquad B = Dy \qquad C = Dz.$$

Le numérateur se réduit à : $D\,(x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$.

Intégrons sur la face extérieure de l'ellipsoïde ayant pour équation :

$$\left[(ax+by+cz)^2+(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2\right]^{\frac{3}{2}} = 1.$$

L'intégrale devient : $\frac{D}{4\pi}\iint(x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy) = \frac{D}{4\pi}\cdot 3V$

Or on a pour le volume de l'ellipsoïde : $V = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{|D|}$ Donc :

$$\frac{1}{4\pi}\iint\frac{A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy}{\left(X^2+Y^2+Z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{D}{|D|} = \pm 1.$$

Ainsi l'intégrale est égale à $+1$, si pour la racine considérée $D>0$, et à -1, si pour la racine considérée $D<0$. Le même raisonnement s'appliquant à toutes les autres racines, on peut énoncer cette proposition générale, due à M. Kronecker :

Théorème de Kronecker. Si l'on prend l'intégrale considérée sur une surface fermée qui entoure plusieurs racines du système : $\begin{cases} f=0 \\ \varphi=0 \\ \psi=0 \end{cases}$ la valeur de l'intégrale sera l'excès du nombre des racines pour lesquelles le déterminant fonctionnel des 3 équations est positif, sur le nombre de celles pour lesquelles il est négatif.

Cette conclusion a été étendue par M. Kronecker au cas de n équations à n inconnues. C'est la généralisation du théorème établi au début du cours (1[er] cahier, page 17) pour 2 fonctions f, φ de 2 variables x, y.
On sait que dans le cas de 2 équations, l'intégrale curviligne ne donne pas en général le nombre des racines ~~contenues~~ communes dans un contour fermé, si ce n'est quand $(f+i\varphi)$ est une fonction analytique de $(x+iy)$; mais on a obtenu un moyen d'évaluer par une intégrale le nombre des racines d'une équation comprises dans un intervalle linéaire sur l'axe Ox. De même, le théorème précédent va nous fournir un moyen de déterminer en général le nombre des racines communes à 2 équations contenues dans un contour donné C (dans le plan des xy.)

Soient ces 2 équations: $f(x, y) = 0 \qquad \varphi(x, y) = 0.$

Adjoignons-leur l'équation:

$$z \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, y)} = 0.$$

On a ainsi un système de 3 équations à 3 inconnues x, y, z; cherchons-en les solutions. Toute racine commune aux 3 équations sera commune aux 2 premières; pour les valeurs correspondantes de x, y, la 3e donnera: $z = 0$, puisque par hypothèse les racines sont simples, c à d.

$$\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, y)} \gtrless 0.$$

Ainsi toutes les racines du système sont dans le plan des xy, et sont les racines communes aux 2 équations proposées. Prenons le contour C pour directrice d'une surface cylindrique parallèle à l'axe des z, et coupons-la par les plans: $z = -\varepsilon$, $z = +\varepsilon$. On délimite ainsi un cylindre: si l'on peut trouver le nombre des racines du système contenues dans ce volume, on aura le nombre des racines communes aux 2 équations proposées, qui sont contenues dans le contour C.

Or le déterminant fonctionnel des 3 équations a un signe constant :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & 0 \\ M & N & \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 > 0.$$

car on a supposé : $\frac{\partial(f,\varphi)}{\partial(x,y)} \gtrless 0$.

Donc la règle de Kronecker donne précisément le nombre des racines cherchées, au moyen d'une intégrale double prise sur la surface du cylindre délimité comme il a été dit.

Nous allons calculer cette intégrale double prise sur la face extérieure du cylindre, et pour cela nous la dédoublerons en 2 intégrales, l'une prise sur la surface cylindrique, l'autre prise sur les 2 bases.

Nous avons pris pour la 3e fonction ψ : $z\frac{\partial(f,\varphi)}{\partial(x,y)} = zD$.

Sur la surface latérale, l'intégrale ne contiendra pas de terme en $\underline{dx\,dy}$, puisque la projection de cette aire sur le plan des xy est nulle.

On a simplement : $\frac{1}{4\pi}\iint A\,dy\,dz + B\,dz\,dx = \frac{1}{4\pi}\iint (A.\cos\alpha + B\cos\beta)\,d\sigma$

α, β étant les angles que fait la normale extérieure à la surface c.à.d. au contour C, avec les axes Ox, Oy. Pour l'élément de surface on a : $d\sigma = ds.\,dz$ produit de 2 quantités positives.

D'où : $\frac{1}{4\pi}\iint (A\cos\alpha\,ds + B\cos\beta\,ds)\,dz = \frac{1}{4\pi}\iint (A\,dy - B\,dx)\,dz$

Intégrons d'abord le long d'une génératrice, en faisant varier z seul, et posons : $P = -\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} B\,dz$ $\qquad Q = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} A\,dz$

On aura ensuite à intégrer suivant le contour C, ce qui donne l'intégrale curviligne : $\frac{1}{4\pi}\int_C P\,dx + Q\,dy$

Nous allons calculer P, Q, en partant des expressions de A, B :

$$A = \frac{\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & 0 \\ zD & \frac{\partial \psi}{\partial z} & D \end{vmatrix}}{(f^2+\varphi^2+z^2D^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{D\left(f\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{(f^2+\varphi^2+z^2D^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} f & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \varphi & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ zD & D & \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{vmatrix}}{(f^2+\varphi^2+z^2D^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-D\left(f\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{(f^2+\varphi^2+z^2D^2)^{\frac{3}{2}}}$$

D'où :

$$P = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{D\left(f\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{(f^2+\varphi^2+D^2z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz \qquad Q = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{D\left(f\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{(f^2+\varphi^2+D^2z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz$$

$$P = \left(f\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial f}{\partial x}\right)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{D\,dz}{(f^2+\varphi^2+D^2z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{f\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial f}{\partial x}}{f^2+\varphi^2}\cdot\frac{2D\varepsilon}{(f^2+\varphi^2+D^2\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$Q = \frac{f\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial f}{\partial y}}{f^2+\varphi^2}\cdot\frac{2D\varepsilon}{(f^2+\varphi^2+D^2\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad \left[\int\frac{dx}{(x^2+A)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{A}\cdot\frac{x}{(x^2+A)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

et, si l'on supprime le facteur 2 dans ces expressions, l'intégrale prise sur la surface convexe se réduit à : $\frac{1}{2\pi}\int P\,dx + Q\,dy$

Prenons maintenant l'intégrale sur les 2 bases du cylindre. Elle ne contient plus que le terme en dxdy, les projections des aires des 2 bases sur les plans des xz et des yz étant nulles : $\frac{1}{4\pi}\iint C\,dxdy$

intégrale étendue à la base supérieure et à la base inférieure du cylindre

On a d'ailleurs :

$$C = \frac{z \begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ D & \frac{\partial D}{\partial x} & \frac{\partial D}{\partial y} \end{vmatrix}}{\left(f^2 + \varphi^2 + D^2 z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$dx\,dy = \cos\gamma\, d\sigma$

Or pour la base supérieure, on a : $z = +\varepsilon$, et $dx\,dy > 0$ car la normale extérieure fait un angle nul avec Oz ; pour la base inférieure, on a au contraire : $z = -\varepsilon$, et $dx\,dy < 0$ puisque la normale extérieure fait avec Oz l'angle π.

Les intégrales prises sur les 2 bases s'ajoutent donc, et leur somme est :

$$\frac{1}{2\pi} \iint C\, dx\,dy \qquad \text{où :} \quad dx\,dy > 0, \quad z = +\varepsilon$$

intégrale étendue à la base supérieure seulement. C'est une intégrale double ordinaire en x, y prise à l'intérieur du contour donné C.

Ainsi le nombre des racines du système : $f(x,y) = 0 \quad \varphi(x,y) = 0$ contenues dans ce contour est exprimé par les 2 intégrales :

$$\frac{1}{2\pi} \int_C P\,dx + Q\,dy \; + \; \frac{1}{2\pi} \iint C\,dx\,dy$$

ε est arbitraire ; ~~donc~~ or, quel que soit ε la somme doit être la même ; donc elle est indépendante de ε. On pourra calculer les 2 intégrales pour une valeur quelconque de ε sauf 0 et ∞. On n'aura qu'à pousser l'approximation à moins de $\frac{1}{2}$ près pour avoir le résultat exact, qui est nécessairement un nombre entier.

Pour ε infiniment petit, l'intégrale curviligne tend vers 0, car P et Q tendent tous deux vers 0. L'intégrale double doit donc tendre vers le nombre des racines. Or C tend vers 0 avec ε, tant qu'on n'est pas en un des points racines du système : $f = 0, \quad \varphi = 0$,

car alors le dénominateur de C s'annule, et comme il est de l'ordre 3e ~~par rapport au numérateur en ε~~, C devient infini. Ce sont les éléments infinis correspondant aux racines qui causent l'indétermination ~~de limite~~ apparente de l'intégrale, pour $\varepsilon = 0$. On ne peut d'ailleurs vaincre cette indétermination, car il faudrait pour cela connaître les racines dont on cherche le nombre.

Pour ε infiniment grand, l'intégrale curviligne reste déterminée; l'intégrale double tend encore vers une limite, mais ses éléments ne sont déterminés que sur la courbe: $D = 0$.

On voit ainsi reparaître la difficulté primitive née du signe du déterminant fonctionnel. Donc pour $\varepsilon = \infty$ non plus que pour $\varepsilon = 0$, on ne peut évaluer le nombre des racines par les intégrales précédentes.

Dans certains cas particuliers, quand on se borne à considérer des polynômes et des contours limités par des arcs de courbes unicursales, l'application de cette méthode est simple et donne un résultat pratique.

Nous allons définir et étudier les fonctions analytiques de 2 variables complexes. Soient les quantités complexes :

$$u = x + iy \qquad v = z + it$$

on appellera fonction analytique de u et de v une fonction de la forme :

$$f(u, v) = P(x, y, z, t) + iQ(x, y, z, t)$$

la fonction complexe $(P + iQ)$ étant fonction analytique à la fois de u et de v. Cette condition s'exprime par les 4 équations :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial t} \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial z}$$

On peut se poser cette question : A combien de conditions satisfait séparément la fonction P ? C'est à dire, combien de conditions faut-il imposer à une fonction P de 4 variables réelles pour qu'on puisse en déduire, par les 4 relations précédentes (à une constante près) la fonction Q correspondante ? Car, connaissant les 4 dérivées partielles de P, on connaîtra celles de Q, et on pourra déterminer cette fonction. Or, si l'on égale les dérivées secondes de Q qui sont identiques, mais prises dans un ordre différent, on obtiendra 6 combinaisons différentes des 4 équations précédentes prises 2 à 2 ; mais on n'aura que 4 relations distinctes, que voici :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial t} = 0 \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0.$$

Si l'on a une fonction P satisfaisant ces 4 équations différentielles du 2e ordre, on peut trouver une fonction Q qui forme, associée à P, une fonction analytique des 2 variables complexes u, v formées elles-mêmes des 4 variables réelles dont dépendent P et Q.

Ainsi, tandis que pour une fonction analytique d'une variable

complexe P et Q ne doivent satisfaire qu'une équation différentielle, l'équation de Laplace, pour une fonction de 2 variables complexes, P et Q doivent satisfaire 4 équations simultanées du 2e ordre. On peut donc prévoir qu'il n'y aura presque aucun rapport entre les fonctions analytiques de 2 variables et celles d'une variable que nous avons étudiées. La théorie des premières n'est donc pas (au moins quand on les considère comme fonctions de variables réelles) une simple généralisation de la théorie des secondes. Au contraire, la théorie des fonctions harmoniques (= finies, continues et satisfaisant à l'équation de Laplace dans un champ limité), que nous avons exposée pour le cas de 2 variables, s'étend sans difficulté, et presque sans changement, au cas de 3, 4 ... n variables (dans un champ à n dimensions) ce qui prouve que telle en est bien la vraie généralisation.

Une fonction analytique de 2 variables complexes : $f(x, y)$ peut se développer en série de Taylor ou de Maclaurin au voisinage d'un point (x, y). Considérons en effet séparément les plan des x et le plan des y : supposons que la fonction f soit holomorphe dans 2 cercles décrits chacun dans un de ces plans. Considérons alors la fonction : $f(xt, yt)$. de la variable complexe t ; x et y étant pris à l'intérieur de leurs cercles respectifs (et non sur la circonférence.) Cette fonction sera développable en une série convergente à l'intérieur du cercle de rayon 1 dans le plan des t, et même pour $|t| = 1$, car elle est continue même au-delà de la circonférence de ray. 1. On aura donc par la formule de Maclaurin :

$$f(x, y) = \Sigma \frac{1}{n!}\left[x\frac{\partial f}{\partial h} + y\frac{\partial f}{\partial k}\right]^{(n)}_{\substack{h=0\\k=0}}$$

Dans ce développement, le terme général de rang n sera un polynôme homogène en x, y ; le coefficient de $x^\mu y^\nu$ dans ce polynôme sera :

$$\frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{\mu!\nu!}\frac{\partial^n f}{\partial x^\mu \partial y^\nu} = \frac{1}{\mu!\nu!}\frac{\partial^n f}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \qquad \mu+\nu = n$$

la dérivée étant prise pour $x=0,\ y=0$.

Cherchons une limite supérieure de cette dérivée : $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^\mu \partial y^\nu}$

Considérons d'abord une fonction d'une seule variable :

$f(x)$ holomorphe dans un cercle de rayon r ; soit C la circonférence on a par la formule de Cauchy : $f(x) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-x}dz$ pour un point fixe (x) de ce cercle.

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}dz \qquad f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

En coordonnées polaires :

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})\, e^{-n\theta i}\, d\theta$$

Soit M le module maximum de la fonction $f(x)$ dans le cercle :

$$|f^n(0)| < \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} M\, d\theta = \frac{n!}{r^n}M \qquad \text{pour } n \text{ quelconque}$$

Revenons à la fonction de 2 variables complexes : $f(x, y)$ et prenons sa dérivée d'ordre μ par rapport à x pour $x=0$; soient r, R les rayons respectifs des cercles où sont compris les points x et y chacun dans leur plan. On aura par la formule précédente, x étant fixe :

$$f_x^\mu(0, y) = \frac{\mu!}{2\pi r^\mu}\int_0^{2\pi} f(re^{\theta i}, y)\, e^{-\mu\theta i}\, d\theta$$

Prenons maintenant la dérivée d'ordre ν de cette fonction dérivée par rapport à y pour $y=0$; il suffit de dériver sous le signe somme.

$$\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{\mu!\,\nu!}{2\pi r^\mu . 2\pi R^\nu}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{\theta i}, Re^{\theta' i})\, e^{-\mu\theta i} e^{-\nu\theta' i}\, d\theta\, d\theta'$$

θ et θ' étant les angles d'intégration sur les cercles de rayon r et R dans les plans de x et de y. Soit M le module maximum de $f(x,y)$ dans ce champ ; on aura pour limite supérieure de la dérivée :

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} < \frac{\mu!\,\nu!}{4\pi^2 r^\mu . R^\nu}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} M\, d\theta\, d\theta' = \frac{\mu!\,\nu!}{r^\mu . R^\nu} M$$

Nous avons trouvé pour le développement de $f(x,y)$ une série de la forme : $\Sigma P_n(x,y)$ P_n étant un polynôme de degré <u>n</u> en x, y.
Or, non-seulement cette série est convergente, mais elle est absolument convergente au sens le plus complet (cf. 1er cahier, page 37) c. à d. qu'elle est encore convergente si dans chaque polynôme P_n on remplace tous les termes par leur valeur absolue (c'est la définition d'une fonction analytique de 2 variables <u>réelles</u>).

Pour le démontrer, nous avons, d'après ce qui précède, une limite supérieure du coefficient de $x^\mu y^\nu$ dans P_n $(\mu+\nu=n)$:

$$\left|\frac{1}{\mu!\,\nu!}\frac{\partial^n f}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\right| < \frac{M}{r^\mu . R^\nu}$$

Donc le terme en $x^\mu y^\nu$ lui-même est inférieur en valeur absolue à :
$M\left(\frac{x}{r}\right)^\mu\left(\frac{y}{R}\right)^\nu$ Telle est la limite supérieure du terme général du polynôme P_n. Remplaçons-y chaque terme par son module.
Soient : $\left|\frac{x}{r}\right| = \alpha$, $\left|\frac{y}{R}\right| = \beta$ $(\alpha < 1, \quad \beta < 1)$

P_n deviendra : $M\left[\alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta^2 + \ldots + \alpha^2\beta^{n-2} + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n\right]$

Remplaçons encore α et β par leur plus grande valeur θ; P_n sera remplacé par : $M(n+1)\theta^n$ Or la série :
$\Sigma M(n+1)\theta^n$ est convergente pour $\theta < 1$, ce qui a lieu. A plus forte raison la série ΣP_n est-elle absolument convergente au sens spécifié plus haut.
On le verrait d'ailleurs en remarquant l'identité suivante :

$$\frac{M}{(1-\alpha)(1-\beta)} = M(1+\alpha+\alpha^2+\dots)(1+\beta+\beta^2+\dots) \geqq \Sigma P_n$$

Ainsi la série obtenue en remplaçant dans chaque polynôme chaque terme par son module supérieur est convergente ; chaque terme a d'ailleurs pour limite supérieure : $M\left(\frac{x}{r}\right)^\mu\left(\frac{y}{R}\right)^\nu$

Problème : Décomposition en facteurs d'une fonction de 2 variables complexes. (M. Weierstrass.)

On sait qu'une fonction $f(x)$ qui a pour racine 0 (d'ordre n) et qui est holomorphe au voisinage de $x=0$ peut se mettre sous forme d'un produit de 2 facteurs : $f(x) = x^n F(x)$ dont le second, $F(x)$ est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas pour $x=0$; on met ainsi en évidence le facteur x^n qui seul s'annule, et qui absorbe pour ainsi dire toute la discontinuité de $f(x)$ pour $x=0$.

On peut toujours supposer $f(x,y)$ telle que $f(0,0)=0$ en transformant une de ses racines en origine par un changement de coordonnées. Cherchons à la décomposer d'une manière analogue en 2 facteurs, l'un s'annulant pour : $x=0$, $y=0$, l'autre ne s'annulant pas. On va montrer que le 1er de ces facteurs

est un polynôme par rapport à l'une des variables.

Pour cela, nous généraliserons un théorème connu de Cauchy : Si une fonction algébrique $f(x, y)$ a pour racine le syst. $x = 0$, $y = 0$, l'équation : $f(0, y) = 0$ a n racines nulles en y. Si on donne à x une valeur ε voisine de 0, l'éq. : $f(\varepsilon, y) = 0$ aura n racines voisines de 0 (Ce théorème assure la continuité d'une courbe algébrique) — On peut étendre ce théorème à une fonction holomorphe dans le voisinage de la racine : $x = 0$, $y = 0$.

— Supposons que $f(0, y)$ ne s'annule pas identiquement ; entourons le point $y = 0$ dans son plan d'un cercle de rayon r ; on peut développer à l'intérieur de ce cercle $f(x, y)$ suivant les puissances de y :

$$f(x, y) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \dots + A_n y^n + \dots$$

et puisque par hypothèse, l'équation : $f(0, y) = 0$ a n racines en y égales à 0, on a (les coefficients A étant des fonctions holomorphes de x dans un cercle de centre : $x = 0$ et de rayon ρ) : $A_0(0) = 0$ $A_1(0) = 0$ ...... $A_{n-1}(0) = 0$ et : $A_n(0) \gtrless 0$ Nous poserons donc :

$$f(x, y) = A_n y^n (1 + P + Q)$$

$$P = \frac{A_0}{A_n y^n} + \frac{A_1}{A_n y^{n-1}} + \frac{A_2}{A_n y^{n-2}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{A_n y}$$

$$Q = \frac{A_{n+1}}{A_n} y + \frac{A_{n+2}}{A_n} y^2 + \frac{A_{n+3}}{A_n} y^3 + \dots$$

Cherchons les limites supérieures de P et de Q. On peut toujours supposer $A_n \gtrless 0$ dans le cercle de rayon ρ (en prenant ρ suffisamment petit)

Soit B le module minimum de A_n dans ce cercle : $|A_n(x)| \geq B$
Soit M le module maximum de $f(x,y)$ pour x situé dans le même cercle ρ ; } quand : $|x| \leq \rho$. les polynômes $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots\ldots$ étant les coefficients des puissances successives de y, sont les dérivées de même ordre de $f(x,y)$ par rapport à y, divisés par la factorielle correspondante ; on a donc, en vertu d'un lemme précédent (page 38) :

$$|A_{n+\nu}| < \frac{M}{r^{n+\nu}} \quad \text{pour} \quad |y| < r \quad \text{(La factorielle disparaît)}$$

Donc : $$|Q| < \frac{M}{B}\left[\frac{y}{r^{n+1}} + \frac{y^2}{r^{n+2}} + \cdots\cdots\right]$$

Enfermons y dans un second cercle plus petit : $|y| \leq r_0 < r$:

$$|Q| < \frac{M}{Br^n}\left[\frac{r_0}{r} + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 + \cdots\cdots\right] = \frac{M}{Br^n}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)\frac{1}{1-\frac{r_0}{r}}$$

Cette limite peut être rendue aussi petite qu'on le veut, puisqu'elle s'annule pour $r_0 = 0$; on prendra donc r_0 assez petit pour que cette limite soit au plus égale à $\frac{1}{2}$; on aura donc : $|Q| < \frac{1}{2}$ pour $\begin{cases} |x| < \rho \\ |y| < r_0 \end{cases}$

Cherchons la limite supérieure de P, qui est une somme limitée.

Supposons y situé sur la circonférence r_0 ; soit C le plus grand des modules des coefficients : $A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots A_{n-1}$ pour $|x| < \rho$; on aura : $$|P| < \frac{C}{Br_0^n} + \frac{C}{Br_0^{n-1}} + \frac{C}{Br_0^{n-2}} + \cdots\cdots + \frac{C}{Br_0}$$

Or on peut prendre C aussi petit qu'on veut, puisque les n fonctions de x : $A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots A_{n-1}$ s'annulent pour $x = 0$.

On prendra donc $\rho_0 < \rho$ assez petit pour que x étant enfermé dans le cercle ρ_0, on puisse rendre $C \leq 2B(r_0^n + r_0^{n-1} + \ldots + r_0) = \frac{Br_0}{1-r_0}$

On aura dans ces conditions : $|P| < \frac{1}{2}$ pour : $\begin{cases} |x| < \rho_0 \\ |y| = r_0 \end{cases}$.

Donnons maintenant à x une valeur quelconque x_1 à l'intérieur du cercle ρ_0 : on va prouver que l'équation : $f(x_1, y) = 0$ a n racines dans le cercle r_0 ; si $x_1 = 0$, ces racines seraient : $y = 0$: Prenons donc $x_1 \gtrless 0$, et appliquons à la fonction d'une seule variable y : $f(x_1, y)$ le théorème de Cauchy énoncé sous cette forme : Le nombre des racines d'une équation $f(x) = 0$ comprises à l'intérieur d'un contour fermé est égal à la variation de l'argument de $f(x)$ le long de ce contour après un tour complet. — En effet, on considère l'intégrale : $\int \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \log f(z)$ qui donne ce nombre $(\times 2\pi)$

Or la variation du logarithme est égale à la variation de l'argument. Cherchons donc quelle est la variation de l'argument de la fonction :

$$f(x_1, y) = A_n y^n (1 + P + Q)$$

dans un tour complet sur le cercle r_0. C'est la somme des variations des arguments de chacun des facteurs. Or A_n est une constante, son argument ne varie pas. Quant à : $(1 + P + Q)$, ce facteur est égal à : $(1 + R)$ où $|R| < 1$

donc son argument reprend la même valeur après un tour complet ; sa variation est nulle. Reste la variation de l'argument de y^n, qui est $2\pi n$; ainsi n est le nombre des racines de $f(x_1 y) = 0$ comprises dans le cercle r_0.

Cela posé, on peut obtenir la décomposition de $f(x, y)$ en 2 facteurs dont l'un seulement s'annule pour : $x = 0$, $y = 0$.

Rappelons les conditions de ce théorème : on a : $|Q| < \frac{1}{2}$

pour toute valeur de x, y dans leurs cercles respectifs ρ_0, r_0.
Mais on n'a : $|P| < \frac{1}{2}$ que si y est sur le cercle r_0.
Considérons une couronne comprise entre les circonférences de rayon r_0 et r_1 $(r_1 < r_0)$. Si l'on prend ρ_1 assez petit pour que, x étant contenu dans le cercle de rayon ρ_1 on ait :

$$(P <) \frac{C}{B}\left(\frac{1}{r_1^n} + \frac{1}{r_1^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{r_1}\right) < \frac{1}{2} \qquad |x| < \rho_1$$

l'inégalité : $|P| < \frac{1}{2}$ sera encore vraie pour $|y| = r_1$; donc elle aura lieu pour y compris dans la couronne (r_0, r_1)

Donnons à x une valeur arbitraire fixe : le facteur $(1 + P + Q)$ sera une fonction holomorphe de y à l'intérieur de la couronne, et ne s'y annulera pas. Sa dérivée logarithmique par rapport à y sera encore une fonction holomorphe de y dans la couronne (r_0, r_1) on pourra la développer en une série de Laurent : $\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} G_p y^p$
G_p étant une fonction holomorphe de x située à l'intérieur du cercle ρ_1 : on a donc pour la dérivée logarithmique de f par rapport à y :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} G_p y^p \qquad r_1 < |y| < r_0$$

Les valeurs de y qui rendent infinie la dérivée logarithmique de f sont les n racines en y de l'équation : $f(x, y) = 0$ dans le cercle r_1.
Posons : $F(y) = (y - y_1)(y - y_2) \ldots \ldots (y - y_n)$
Le quotient $\frac{f}{F}$ restera fini dans tout le cercle r ; donc sa dérivée logarithmique restera finie, c.à.d. que : $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F}$ sera une fonction finie de y ; or, puisque $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \sum G_p y^p$,

et que $\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{F}$ est la seule partie de $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}$ qui devienne infinie cette dérivée est égale à la somme des termes qui contiennent les puissances négatives de y dans la série de Laurent ; on a donc

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{F} = \sum_{p=-\infty}^{p=-1} G_p y^p \qquad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{F} = \sum_{p=0}^{p=+\infty} G_p y^p$$

Or :
$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{F} = \frac{1}{y-y_1} + \frac{1}{y-y_2} + \cdots + \frac{1}{y-y_n}.$$
$$= \frac{n}{y} + \frac{\Sigma y_1}{y^2} + \frac{\Sigma y_1^2}{y^3} + \cdots + \frac{\Sigma y_1^{n-1}}{y^n} + \cdots$$

On a donc : $n = G_{-1}$, $\Sigma y_1 = G_{-2}$, $\Sigma y_1^2 = G_{-3}$, ... $\Sigma y_1^{n-1} = G_{-n}$, ... c.à.d des fonctions holomorphes de x ; F sera donc une fonction de x de la forme :
$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1} y + a_n$$
$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ étant des fonctions symétriques de x. Ainsi $F(y, x)$ est un polynôme en y dont les coefficients sont holomorphes en x.

Intégrons les dérivées logarithmiques dont la différence est une série ordonnée suivant les puissances positives de y :
$$\log f - \log F = H(y, x) + \log C$$
H étant holomorphe quand x est dans le cercle ρ, et y dans le cercle r_0 ; y peut être non seulement dans la couronne (r_0, r_1), mais dans le cercle intérieur r_1, car la série qui procède suivant les puissances positives de y $(0 < p < +\infty)$ est valable pour tout l'intérieur du cercle r_0, de sorte que les fonctions G_p définies dans la couronne sont prolongées analytiquement dans le cercle intérieur r_1. On a, en passant

aux nombres : $f(x,y) = F(x,y)\, C\, e^{H(y,x)}$

C est une constante par rapport à y c.à.d. une fonction de x. Pour avoir sa valeur, il suffira de donner à y une valeur particulière b prise à l'intérieur de la couronne : $\dfrac{f(x,b)}{F(x,b)}\, e^{-H(b,x)} = C(x)$

Cette fonction de x ne s'annule pas dans le cercle ρ_1, car f et F ne s'y annulent pas et e^{-H} n'est jamais nulle. On a donc en somme la relation identique :

$$f(x,y) = F(x,y)\, K(x,y) \qquad K \gtrless 0 \qquad |x| < \rho_1 \qquad |y| < r_0$$

Ainsi est mise en évidence la partie de la fonction qui s'annule pour $x=0$, $y=0$, et qui pour x voisin de 0, admet n racines en y voisines de 0. Remarquons que ce facteur $F(x,y)$ qui renferme toute la discontinuité de la fonction $f(x,y)$ au point $(x=0, y=0)$ est un polynôme du degré n en y ; c'est ce qui fait l'intérêt de cette décomposition en facteurs, due à M. Weierstrass.

C'est aussi ce qui la rend pratique dans l'application à certains cas particuliers.

Soient par exemple 2 fonctions : $F(x,y)$ $F_1(x,y)$ s'annulant toutes deux pour : $x=0$, $y=0$.

On demande ce que devient leur quotient pour : $x=0$, $y=0$.

Le rapport : $\dfrac{F_1(0,0)}{F(0,0)}$ est en général indéterminé, car il dépend de la relation qui existe entre les variables indépendantes x, y quand elles tendent simultanément vers 0. Pour savoir si cette indétermination est réelle, il suffit d'employer la décomposition précédente :

$$F(x,y) = f(x,y)\, K(x,y) \qquad F_1(x,y) = f_1(x,y)\, K_1(x,y)$$

où : $f(0,0) = 0$, $f_1(0,0) = 0$, $K(0,0) \gtrless 0$, $K_1(0,0) \gtrless 0$.
Dans le quotient $\frac{F_1}{F}$, on n'a pas à tenir compte de $\frac{K_1}{K}$ qui reste fini pour : $x = 0$, $y = 0$; on n'aura qu'à considérer le rapport : $\frac{f_1}{f}$ au voisinage du point : $x = 0$, $y = 0$. Or ce sont 2 polynômes en y ; donc, pour que $\frac{F_1(0,0)}{F(0,0)}$ ne soit pas nul, il faudra que f_1 soit divisible par f.

On voit par ce qui précède combien l'extension des propriétés des fonctions analytiques au cas de 2 variables complexes peut devenir délicate et difficile ; elle est parfois impossible, par exemple pour la décomposition d'une fonction en facteurs simples.

Nous allons toutefois, pour donner un aperçu de cette extension, définir, d'après M. Poincaré, l'intégrale d'une fonction analytique de 2 variables complexes.

Nous avons défini précédemment ce que signifie l'intégrale double :

$$\iint A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy$$

étendue à une surface limitée, sur un côté déterminé, A, B, C étant des fonctions de x, y, z. Étendons cette notion au cas de n variables : $x_1\ x_2\ x_3 \ldots\ldots x_n$. On aura : $\iint \Sigma A_{ik}\,dx_i\,dx_k$

Il s'agit de définir ce symbole.

On considère pour cela $x_1\ x_2 \ldots x_n$ comme fonctions continues de 2 paramètres u, v ; dans le plan (u, v) on assujettit le point (uv) à décrire une aire limitée. A ces valeurs ou points (u, v) correspondent des systèmes de valeurs de $x_1\ x_2 \ldots x_n$ formant un ensemble continu, qu'on peut

appeler, pour la commodité du langage une surface dans l'espace à n dimensions. — A_{ik} est une certaine fonction de $x_1\, x_2 \ldots x_n$.

Cela posé, l'intégrale double proposée pourra s'écrire :

$$\iint \Sigma A_{ik} \frac{\partial(x_i\, x_k)}{\partial(u\, v)}\, du\, dv \quad \text{étendue à l'aire limitée } (u, v)$$

C'est maintenant une intégrale double parfaitement déterminée. — En donnant à i et à k toutes les valeurs 1, 2, 3 … n, on aura des couples de termes correspondant aux mêmes valeurs, par exemple :

$$A_{ik} \frac{\partial(x_i\, x_k)}{\partial(u\, v)} \quad \text{et} \quad A_{ki} \frac{\partial(x_k\, x_i)}{\partial(u\, v)}$$

Or $A_{ki} \dfrac{\partial(x_k\, x_i)}{\partial(u\, v)} = - A_{ki} \dfrac{\partial(x_i\, x_k)}{\partial(u\, v)}$ Donc, si l'on pose :

$A_{ik} = - A_{ki}$, on aura 2 fois le 1er terme en A_{ik}. Par exemple dans le cas de l'intégrale : $\iint A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy$

où $n = 3$, on aura $A_{2,3} = \dfrac{A}{2}$ $A_{3,1} = \dfrac{B}{2}$ $A_{1,2} = \dfrac{C}{2}$.

Proposons-nous maintenant le même problème que pour l'intégrale à 3 variables : cherchons à quelles conditions doivent satisfaire les fonctions données A_{ik} pour que l'intégrale double ne dépende pas de la surface d'intégration, mais seulement de son contour.

Pour cela, nous transformerons cette intégrale en une intégrale à 3 variables étendue à une surface de l'espace à 3 dimensions, en rendant $x_1\, x_2 \ldots x_n$ fonctions continues de X, Y, Z :

$x_1 = f_1(XYZ) \quad x_2 = f_2(XYZ) \ldots \ldots \quad x_n = f_n(XYZ)$

X, Y, Z deviendront des fonctions de u, v, c.à.d. ~~décriront une surface~~ dans l'espace à 3 dimensions ; on a, par une formule précédemment

page 27

établie : $\dfrac{\partial(x_i x_k)}{\partial(uv)} = \dfrac{\partial(f_i f_k)}{\partial(XY)} \dfrac{\partial(XY)}{\partial(uv)} + \dfrac{\partial(f_i f_k)}{\partial(YZ)} \dfrac{\partial(YZ)}{\partial(uv)} + \dfrac{\partial(f_i f_k)}{\partial(ZX)} \dfrac{\partial(ZX)}{\partial(uv)}$

L'intégrale devient :

$$\iint \sum A_{ik} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(YZ)} dY dZ + \sum A_{ik} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(ZX)} dZ dX + \sum A_{ik} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(XY)} dX dY$$

intégrale superficielle de la forme : $\iint A dy\, dz + B dz\, dx + C dx\, dy$ prise suivant la surface dont les coordonnées sont X, Y, Z déterminées par les paramètres u, v. Écrivons, en appliquant une théorème précédent, page 23 la condition de intégrabilité : $\dfrac{\partial A}{\partial x} + \dfrac{\partial B}{\partial y} + \dfrac{\partial C}{\partial z} = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial X}\left[\sum\sum A_{ik} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(YZ)}\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\sum\sum A_{ik} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(ZX)}\right] + \frac{\partial}{\partial Z}\left[\sum\sum A_{ik} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(XY)}\right] = 0.$$

Nous avons indiqué une double sommation relative aux 2 indices i, k. Cette identité doit avoir lieu quelles que soient les fonctions $f_1 f_2 \dots f_n$ prises arbitrairement. Les A_{ik} étant des fonctions de $x_1\, x_2\, x_3 \dots\dots x_n$ sont devenues des fonctions de X, Y, Z — Prenons d'abord les dérivées des dérivées placées entre crochets ; A_{ik}, facteur commun, aura pour coefficient : $\dfrac{\partial}{\partial X} \dfrac{\partial(f_i f_k)}{\partial(YZ)} + \dfrac{\partial}{\partial Y} \dfrac{\partial(f_i f_k)}{\partial(ZX)} + \dfrac{\partial}{\partial Z} \dfrac{\partial(f_i f_k)}{\partial(XY)} = 0$

Cette somme est identiquement nulle quelles que soient f_i et f_k.
Prenons ensuite les dérivées de A_{ik} : $\dfrac{\partial}{\partial X} A_{ik} = \sum_h \dfrac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \dfrac{\partial x_h}{\partial X}$ etc.
On aura donc au total :

$$\sum_i \sum_k \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(YZ)} \sum_h \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial f_h}{\partial X} + \sum_i \sum_k \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(ZX)} \sum_h \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial f_h}{\partial Y} + \sum_i \sum_k \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(XY)} \sum_h \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial f_h}{\partial Z}$$

Réunissons les termes en (i, k, h) :

$$\sum\sum\sum \left[\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \cdot \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(XY)} \frac{\partial f_h}{\partial Z} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(YZ)} \frac{\partial f_h}{\partial X} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial(f_i f_k)}{\partial(ZX)} \frac{\partial f_h}{\partial Y}\right]$$

ce qui revient à : $\sum\sum\sum \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial(f_i f_k f_h)}{\partial(XYZ)} = 0$ (condition)

la sommation triple étant étendue à tous les arrangements (i, k, h). Or le déterminant fonctionnel se trouvera en facteur dans tous les termes qui contiennent (i, k, h) en permutation circulaire ; on a donc :

$$\sum\sum\sum \left[\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} + \frac{\partial A_{kh}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{hi}}{\partial x_k}\right] \frac{\partial(f_i f_k f_h)}{\partial(XYZ)} = 0$$

la sommation triple étant étendue à toutes les combinaisons des 3 indices ne formant pas entre elles de permutations circulaires. Cette condition devant être vérifiée identiquement quelles que soient les fonctions $f_i\, f_k\, f_h$, la somme entre crochets doit être identiquement nulle, quels que soient $x_i\, x_k\, x_h$:
$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} + \frac{\partial A_{kh}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{hi}}{\partial x_k} = 0$$

On aurait une identité semblable pour le terme contenant (i, h, k) dans l'ordre inverse :
$$\frac{\partial A_{ih}}{\partial x_k} + \frac{\partial A_{hk}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{ki}}{\partial x_h} = 0$$

Or, puisqu'on a posé : $A_{ik} = -A_{ki}$, etc. cette identité se réduit à la précédente (le 1er membre étant seulement changé de signe.) On a donc autant d'identités semblables qu'il y a de combinaisons de $\underline{n}$ indices 3 à 3 : $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Telles sont les conditions d'intégrabilité de l'intégrale de surface à $\underline{n}$ variables ; on voit que pour $n = 3$, on retrouve l'unique condition, qui nous a d'ailleurs servi à démontrer ce théorème général : $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$.

— Cela posé, considérons 2 intégrales de la forme : $\iint A_{ik}\, dx_i\, dx_k$ où $x_1\, x_2 \ldots x_n$ sont respectivement exprimés en fonction de u, v par : $x_1 = f_1(u,v)$ $x_2 = f_2(u,v)$ ---- — $x_n = f_n(u,v)$

et par : $x_1 = F_1(u,v)$ $x_2 = F_2(u,v)$ . . . . $x_n = F_n(u,v)$

et supposons que dans ces 2 systèmes, $x_1\, x_2 \ldots x_n$ prennent les mêmes valeurs sur un contour fermé C dans le plan des (u,v). Ces 2 systèmes définiront 2 surfaces, σ et Σ, dans l'espace à n dimensions, et ces 2 surfaces passeront par le même contour Γ correspondant à C

On va prouver que les 2 intégrales prises sur ces 2 surfaces σ, Σ dans l'intérieur de leur contour commun Γ sont égales –

Pour cela, on peut représenter les 2 surfaces par les mêmes équations ; en effet, si l'on pose : $x_i = f_i(u,v)\dfrac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} + F_i(u,v)\dfrac{\lambda-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$

on voit que pour : $\lambda=\lambda_1$, x_i se réduit à F_i,

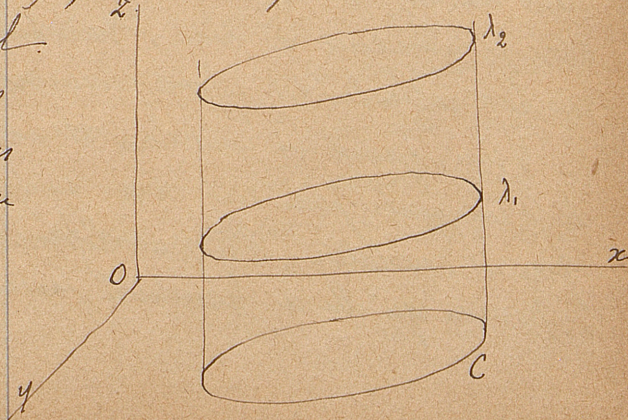
et pour : $\lambda=\lambda_2$, x_i ——— f_i.

En faisant varier λ d'une manière continue, on obtient une famille de surfaces (dans l'espace à $\underline{n}$ dimensions) qui passent toutes par le même contour Γ, car sur ce contour : $f_i = F_i$, alors x_i se réduit à : f_i ou F_i.

On peut donc considérer maintenant $x_1\, x_2 \ldots x_n$ comme fonctions des 3 quantités u, v, λ, que nous appellerons : X, Y, Z.

L'intégrale deviendra alors une intégrale superficielle ordinaire dans l'espace à 3 dimensions (XYZ), et si on la prend sur une surface fermée, le résultat sera nul.

Soit donc le contour C tracé dans le plan des (XY) ou (u,v) ; menons par ce contour une surface cylindrique parallèle à Oz ; coupons-la par les



plans : $z=\lambda_1$, $z=\lambda_2$, suivant les contours C_1, C_2 égaux à C. On délimite ainsi un cylindre ; l'intégrale prise sur la surface de ce cylindre sera nulle. Or les 2 intégrales considérées, prises dans l'espace à n dimensions sur les surfaces σ et Σ, deviennent, dans l'espace $OXYZ$, les intégrales prises sur les bases du cylindre ($\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$) dans le même sens ; tout revient à prouver que ces 2 intégrales sont égales, ou, si l'on change le signe de l'une d'elles pour qu'elles soient toutes deux prises sur la face extérieure du cylindre, par exemple, que leur somme algébrique (c'à-d. leur différence) est nulle.

On a en général :
$$\iint A_{ik}\,dx_i\,dx_k = \iint A\,dY\,dZ + B\,dZ\,dX + C\,dX\,dY$$
quand on y fait $z=\lambda_1$, $z=\lambda_2$, pour avoir les intégrales des bases, elles se réduisent à :
$$\iint C\,dX\,dY = \iint C\,du\,dv.$$

Or, puisque l'intégrale prise sur la surface totale est nulle, il suffit de prouver que l'intégrale prise sur la surface latérale est nulle.

On commencera par intégrer le long des génératrices, pour faire la somme de ces intégrales le long de C. Or, le long d'une génératrice (u, v), les quantités : $x_1\, x_2 \ldots x_n$ ont la même valeur, car elles sont indépendantes de λ ;
$$x_i = f_i(u, v) = F_i(u, v)$$
donc toutes les dérivées partielles de $x_1\, x_2 \ldots x_n$ par rapport à λ sont nulles, et tous les termes de l'intégrale prise suivant une génératrice se réduisent à zéro ; par suite l'intégrale totale prise sur la surface latérale est identiquement nulle c. q. f. d.

Ainsi, quand les conditions d'intégrabilité sont remplies, la valeur de l'intégrale prise sur une surface quelconque passant par un contour fixe est constante. On peut déformer cette surface de toutes les manières, pourvu qu'elle ne franchisse jamais un point où les fonctions soient

discontinues.

Supposons maintenant qu'on ait 2 variables complexes :

$$x = x_1 + ix_2 \qquad y = y_1 + iy_2$$

Une fonction analytique de ces 2 variables pourra s'écrire :

$$f(x, y) = f(x_1, x_2, y_1, y_2) = P(x_1, x_2, y_1, y_2) + iQ(x_1\, x_2\, y_1\, y_2)$$

et l'on a entre les 2 fonctions réelles P et Q les relations connues :

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_2} \qquad \frac{\partial P}{\partial x_2} = -\frac{\partial Q}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial P}{\partial y_1} = \frac{\partial Q}{\partial y_2} \qquad \frac{\partial P}{\partial y_2} = -\frac{\partial P}{\partial y_1}$$

Si $x_1\, x_2\, y_1\, y_2$ sont 4 fonctions réelles de u, v, x, y seront 2 fonctions complexes de u, v. L'intégrale double de f devient alors :

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \iint (P + iQ)(dx_1 + i dx_2)(dy_1 + i dy_2)$$

Or :
$$(dx_1 + i dx_2)(dy_1 + i dy_2) = dx_1\, dy_1 - dx_2 dy_2 + i(dx_2\, dy_1 + dx_1\, dy_2)$$

d'où l'intégrale
$$\iint (P + iQ)\left[dx_1 dy_1 - dx_2\, dy_2 + i(dx_2\, dy_1 + dx_1\, dy_2)\right]$$

qui se dédouble en 2 intégrales réelles :

$$\iint P(dx_1 dy_1 - dx_2 dy_2) + Q(dx_2 dy_1 + dx_1 dy_2) + i \iint Q(dx_1 dy_1 - dx_2 dy_2) + P(dx_2 dy_1 + dx_1 dy_2)$$

Telle sera par définition la signification de l'intégrale double d'une fonction analytique de 2 variables complexes. Cette intégrale est ainsi complètement définie, et ramenée à 2 intégrales doubles de fonctions réelles des variables réelles u, v.

On peut généraliser le théorème de Cauchy établi pour les fonctions analytiques d'une variable complexe et démontrer que cette intégrale double est indépendante de la surface d'intégration (dans l'espace à 4 dimensions) et ne dépend que de son contour. — Pour cela

il suffit de vérifier les conditions d'intégrabilité sur les 2 intégrales réelles obtenues : il y en a 4 pour chacune d'elles et on les obtiendra en considérant tour à tour comme nulles les 4 variables réelles $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$.

Posons d'abord : $x_4 = 0$: condition : $\dfrac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial A_{23}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_{31}}{\partial x_2} = 0$

La 1e intégrale se réduit à : $\iint P\,dx_1\,dx_3 - Q\,dx_2\,dx_3$

$A_{31} = -P \quad A_{23} = -Q \quad A_{12} = 0 \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} + \dfrac{\partial P}{\partial x_2} = 0$

Cette condition est vérifiée, car on a : $\dfrac{\partial P}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x_1}$.

Posons : $x_1 = 0$; condition : $\dfrac{\partial A_{23}}{\partial x_4} + \dfrac{\partial A_{34}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial A_{42}}{\partial x_3} = 0$

La 1e intégrale se réduit à : $-\iint P\,dx_2\,dx_4 + Q\,dx_2\,dx_3$

$A_{23} = Q \quad A_{42} = -P \quad A_{34} = 0 \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x_4} - \dfrac{\partial P}{\partial x_3} = 0$

Condition vérifiée, car on a : $\dfrac{\partial P}{\partial x_3} = \dfrac{\partial Q}{\partial x_4}$.

Posons : $x_2 = 0$. condition : $\dfrac{\partial A_{13}}{\partial x_4} + \dfrac{\partial A_{34}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_{41}}{\partial x_3} = 0$

La 1e intégrale se réduit à : $\iint P\,dx_1\,dx_3 - Q\,dx_1\,dx_4$

$A_{13} = P \quad A_{41} =$ [illegible] $\quad A_{34} = 0 \qquad \dfrac{\partial P}{\partial x_4} + \dfrac{\partial Q}{\partial x_3} = 0$

Condition vérifiée, car on a : $\dfrac{\partial P}{\partial x_4} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x_3}$.

Posons enfin : $x_3 = 0$; condition : $\dfrac{\partial A_{12}}{\partial x_4} + \dfrac{\partial A_{24}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_{41}}{\partial x_2} = 0$

La 1e intégrale se réduit à : $-\iint P\,dx_2\,dx_4 + Q\,dx_1\,dx_4$

$A_{24} = P \quad A_{41} = -Q \quad A_{12} = 0 \qquad \dfrac{\partial P}{\partial x_1} - \dfrac{\partial Q}{\partial x_2} = 0$

Condition vérifiée, car on a : $\dfrac{\partial P}{\partial x_1} = \dfrac{\partial Q}{\partial x_2}$.

On vérifierait de même les 4 conditions d'intégrabilité sur la seconde intégrale; le théorème est donc démontré.

— On a démontré précédemment que l'intégrale $\iint A_{ik}\, dx_i\, dx_k$ est nulle quand on la prend suivant une surface fermée; on entend par surface fermée dans l'espace à n dimensions l'ensemble des points $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ quand le point (XYZ) décrit une surface fermée dans l'espace à 3 dimensions.

Ce théorème suppose que les fonctions sont continues à l'intérieur de la surface fermée. L'intégrale prise sur une surface fermée ne sera pas nulle, si les fonctions deviennent infinies à l'intérieur. Nous allons vérifier ce fait sur un exemple particulier : considérons l'intégrale

$$\iint \frac{R(x,y)}{xy}\, dx dy$$

Son élément différentiel devient infini pour $x = 0$, et pour $y = 0$. Dans le plan des x et dans le plan des y l'origine est un point de discontinuité de la fonction. Définissons les 2 variables complexes en fonction de 2 paramètres, u, v ; et posons par exemple

$$x = re^{iu} \qquad y = r'e^{iv}$$

les points x, y décrivent ainsi chacun une circonférence dans leur plan respectif autour de l'origine, quand u et v varient de 0 à 2π. Dans le plan des (uv) on prendra pour champ d'intégration le carré formé sur les 2 axes avec un côté égal à 2π. On aura ainsi une surface fermée dans l'espace à 4 dimensions; en effet, rien n'arrête x, y qui tournent indéfiniment sur leurs cercles; et si le carré de côté 2π dans le plan (uv) semble borner la fonction ce n'est qu'en apparence car la fonction reprend les mêmes valeurs sur les côtés opposés de ce carré (pour 0 et 2π) qui représente sa double période

L'intégrale proposée devient : $-\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R(re^{iu}, re^{iv})\, du\, dv$

car : $dx\,dy = -r r' e^{iu} e^{iv}$, ce qui fait disparaître le dénominateur — L'intégrale est prise le long des 2 cercles que décrivent x et y ; u et v variant de 0 à 2π. La valeur de cette intégrale dépend de la valeur de R pour le point : $x=0$, $y=0$ intérieur à la surface fermée ; car dans le développement de R tous les termes s'annulent, sauf le 1er : $R(0,0)$ qui est sa valeur au pôle. L'intégrale prise sur la surface fermée est donc égale à : $-R(0,0)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} du\,dv = -4\pi^2 R(0,0)$

$R(0,0)$ peut s'appeler le résidu de la fonction R relatif au pôle $\begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases}$

Considérons plus généralement l'intégrale double :

$$\iint \frac{R(x,y)}{P(x,y)\,Q(x,y)}\, dx\,dy$$

qu'on peut ramener à la précédente par un changement de variables. Supposons qu'on la prenne sur une surface fermée qui contienne une racine simple des 2 équations : $P(x,y)=0$ $\quad Q(x,y)=0$ de sorte que leur déterminant fonctionnel ne soit pas nul : $\frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)} \neq 0$.

On peut toujours faire en sorte que ce point-racine devienne l'origine dans l'espace à 4 dimensions (x,y). Posons :

$$P(x,y) = X \qquad\qquad Q(x,y) = Y$$

Ces formules de transformation font correspondre les points (x,y) et (X,Y) d'une manière univoque ; en particulier à l'origine $(x=0, y=0)$ correspond l'origine : $(X=0, Y=0)$ $\quad P(0,0)=0 \quad Q(0,0)=0.$

On peut donc établir une correspondance uniforme entre 2 aires au voisinage des 2 origines. L'intégrale devient, dans l'espace à 4 dim. (X,Y) :

$$\iint \frac{R(x,y)\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}\ dX\,dY}{XY} \qquad \text{où}: \quad \frac{\partial(xy)}{\partial(XY)} = \frac{1}{\frac{\partial(P,Q)}{\partial(xy)}}$$

Elle est ainsi ramenée à la forme précédente.

La valeur qu'elle prend sur la surface d'intégration (dans l'espace à 4 dimensions x, y) est égale à : $\quad -4\pi^2 \dfrac{R(0,0)}{\left(\dfrac{\partial(PQ)}{\partial(xy)}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}}$

$\dfrac{R(0,0)}{\dfrac{\partial(PQ)}{\partial(xy)}}$ est le résidu de R relatif au pôle : $x=0$, $y=0$.

L'ordre des 2 variables XY par rapport aux variables primitives xy n'est pas indifférent : changer cet ordre revient à prendre l'intégrale sur l'autre côté de la surface ; c'est donc changer le signe de l'intégrale :

$$\frac{\partial(XY)}{\partial(xy)} = -\frac{\partial(YX)}{\partial(xy)}$$

Appliquons ces résultats à un exemple simple : $\displaystyle\iint \frac{dx\,dy}{x^2+y^2-1}$

Considérons les 2 variables complexes x, y chacune dans son plan ; pour avoir les pôles de la fonction, prenons $y = \sqrt{1-x^2}$ en donnant au radical un signe déterminé ; à chaque valeur de x correspondra une valeur de y. Laissons x constant : $x = x_1$, soit y_1 le point correspondant à x_1 ; décrivons autour de y_1 un cercle de rayon fixe ; intégrons le long de ce cercle ; la fonction aura pour pôle y_1, et comme elle peut s'écrire : $\dfrac{1}{2y_1}\left(\dfrac{1}{y-y_1} - \dfrac{1}{y+y_1}\right)$

son résidu relatif à ce pôle est $\dfrac{1}{2y_1}$.

Donc sa valeur suivant le cercle fixe est : $\dfrac{\pi i}{y_1} = \dfrac{\pi i}{\sqrt{1-x_1^2}}$

Si maintenant on l'intègre par rapport à x en faisant varier x, on aura : $\displaystyle\int \frac{\pi i\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

à prendre sur la surface fermée qu'engendre le cercle de centre y et de

rayon constant quand x se déplace dans son plan suivant une courbe fermée quelconque : comme il faut qu'on revienne à x_0 avec la même valeur qu'on en était parti, le contour fermé doit entourer les 2 points : $x = +1$, $x = -1$ ou n'en entourer aucun : car ce sont les racines de $1 - x^2 = 0$, c. à d. les pôles de la fonction : son résidu relatif à chacun d'eux est πi, le résidu total doit être 0 ou $2\pi i$. La valeur de l'intégrale prise suivant une surface fermée (dans l'espace à 4 dim) entourant ces 2 pôles sera : $-2\pi^2$.

On peut se faire une idée de la surface sur laquelle on intègre, sinon se la représenter parfaitement : quand x se déplace, y se déplace avec son cercle qui lui est invariablement lié, de sorte que ce cercle suit le contour fermé décrit par x et revient à sa position initiale. Par analogie avec l'espace à 3 dimensions, on pourra appeler tore la surface ainsi engendrée ; la surface d'intégration est donc, si l'on veut, un tore à 4 dimensions.

Étude des fonctions non uniformes d'une variable imaginaire

Considérons la fonction : $u = \sqrt{(z-a)(z-b)\ldots\ldots(z-l)}$
qui a pour points critiques les points $a, b, \ldots\ldots l$. Si l'on part d'un point z_0 du plan et qu'on y revienne par un circuit renfermant aucun des points critiques, on retrouvera la même détermination dont on était parti. Mais si l'on tourne une fois autour du point a, par exemple, l'argument de $(z-a)$ variera de 2π :

$z-a = re^{\theta i}$ $\sqrt{z-a} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2} i}$

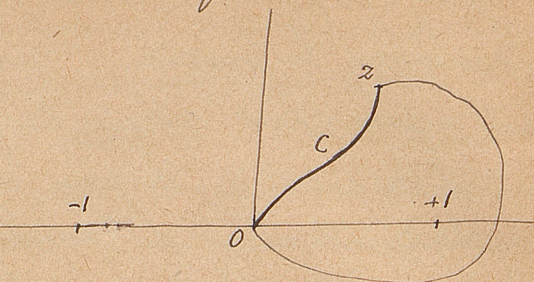
et par conséquent l'argument de $\sqrt{z-a}$ aura varié de π, c.à.d. que $\underline{u}$ aura changé de signe. Si l'on tourne 2 fois autour du p. a, ou une fois autour de 2 p. a, b dans le même sens, l'argument de $\sqrt{(z-a)(z-b)\ldots(z-l)}$ aura varié de 2π, et on retrouvera $\underline{u}$ avec le même signe en z_0. Donc $\underline{u}$ a 2 déterminations égales et de signe contraire qui s'échangent chaque fois que l'on fait un tour complet autour d'un de ses points critiques.

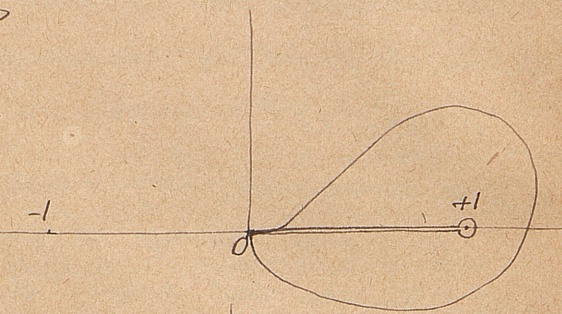
Considérons maintenant l'intégrale $\displaystyle\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$
prise suivant un chemin déterminé C du p. O au p. fixe Z. L'élément différentiel a pour pôles : $z = +1$, $z = -1$.
Sur tout chemin C' allant de O à Z et n'enfermant entre lui et C aucun des pôles de la fonction, l'intégrale garde la même valeur ; c.à.d. qu'on peut déformer le chemin C de toutes les manières, pourvu qu'il ne franchisse pas un pôle. Tout autre chemin de O à Z, formant avec C un contour qui enferme un pôle, est équivalent à un circuit fermé ~~entourant~~ ce pôle et au chemin simple C : il suffit pour le montrer de prendre 2 fois, en sens inverse, le chemin C, et de remar-

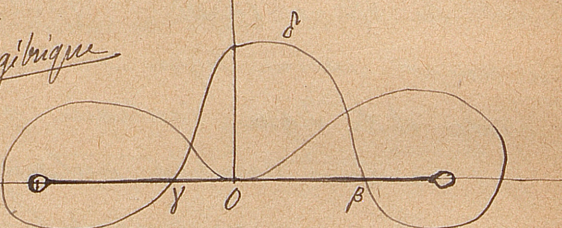
quer que l'intégrale prise sur ce chemin 2 fois en sens contraire est nulle. On est donc ramené à étudier les circuits fermés partant de O et y aboutissant après avoir fait un certain nombre de tours autour des pôles.

Or tout circuit faisant un seul tour autour d'un des pôles, +1 par exemple peut se réduire, par des déformations permises, au double chemin rectiligne de O à +1 parcouru dans les 2 sens et à une circonférence infiniment petite entourant le point +1; l'ensemble s'appelle un lacet. Plus généralement, tout circuit entourant les pôles peut se réduire à une somme algébrique de lacets. Pour le montrer, il suffit de revenir à l'origine toutes les fois qu'on rencontre un lacet, et de repartir de l'origine pour continuer le circuit; l'intégrale prise sur les contours fermés n'entourant aucun pôle est nulle. On trouve ainsi dans tous les cas le nombre de lacets auquel on peut ramener le contour proposé, si compliqué qu'il soit.

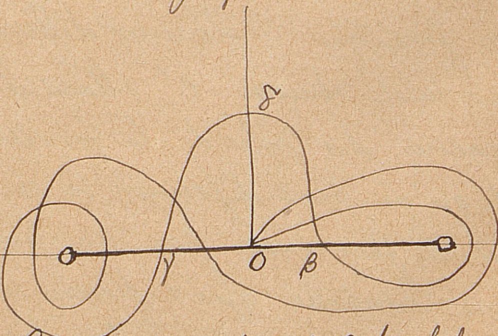
Pour évaluer l'intégrale prise suivant un tel contour, il suffit de calculer sa







Contour équivalent aux 2 lacets simples: le contour $O\beta\delta\gamma O$ donne un résultat nul.



Contour équivalent à 2 fois le lacet $O-1$ pris dans le même sens et à 2 lacets $O+1$ pris en sens contraire; le contour $O\beta\delta\gamma O$ donne un résultat nul

valeur sur un lacet simple. Or, sur le cercle de rayon infiniment petit ρ qui entoure le pôle +1, par exemple, l'intégrale est infiniment petite avec ρ, et comme sa valeur est indépendante de ρ, elle est nulle. Restent les 2 intégrales :

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad \text{et} \quad \int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

qui ne se détruisent pas, bien au contraire : car une fois qu'on a tourné autour du pôle +1, on a l'autre détermination de la fonction ; $\sqrt{1-z^2}$ a changé de signe, de sorte que les 2 intégrales s'ajoutent (dz changeant de signe ainsi que $\sqrt{1-z^2}$ si l'on identifie les limites supérieure et inférieure) ; on obtient (z étant réel) :

$$2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2 \arcsin 1 = \pi.$$

On a supposé qu'on était parti de 0 avec le radical positif, c.à.d. avec la détermination +1 : on y revient avec la détermination −1. Si l'on partait de 0 avec celle-ci, on aurait évidemment pour l'intégrale la valeur $-\pi$, et on reviendrait en 0 avec la détermination +1.

De même, l'intégrale prise suivant le lacet $(0, -1)$ en partant de la détermination +1 (pour le radical) est égale à $-\pi$; en partant de la détermination −1, à $+\pi$.

Ainsi l'intégrale prise sur un circuit quelconque partant de 0 et y aboutissant aura pour valeur la somme algébrique des valeurs qu'elle prend sur les 2 lacets parcourus un certain nombre de fois dans un sens ou dans l'autre, c.à.d. un multiple de π. Par exemple si l'on fait 2 fois le tour du pôle +1 dans le même sens, on aura pour résultat : $+\pi + (-\pi) = 0$.

En général, si l'on considère tous les chemins qui vont de 0 en z, et qu'on prenne une détermination $\underline{u}$ de l'intégrale prise suivant le chemin C, on les décomposera en un circuit fermé ~~et en un~~ plus le chemin C; si le circuit fermé fait un nombre pair de tours autour des 2 pôles, cà d. s'il équivaut à un nombre pair de lacets, la fonction reprendra la même détermination en 0, et son intégrale de 0 à z aura pour valeur: $2n\pi + u$

Si au contraire le circuit contient un nombre impair de lacets, la fonction ~~aura~~ changé de signe en revenant en 0 et l'on aura de 0 en z la détermination contraire de l'intégrale $(-u)$; sa valeur totale sera donc: $(2n+1)\pi - u$.

Ces 2 formules, qui contiennent la période 2π (n étant entier) représentent toutes les déterminations possibles de l'intégrale:

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$ prise le long d'un chemin quelconque

On voit que ces déterminations coïncident, quand z est réel, avec les déterminations de $\underline{\text{Sin} z}$.

Considérons maintenant l'intégrale elliptique de 1e espèce.

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}$$

prise suivant un chemin quelconque entre 2 points z_0, z du plan, l'un fixe, l'autre variable. Pour trouver toutes les déterminations de cette intégrale, on cherchera, comme ci-dessus, ses déterminations diverses correspondant aux différents circuits issus de z_0 et y aboutissant. On verra, par le même raisonnement, qu'ils peuvent se réduire à une somme algébrique des lacets (z_0, a) (z_0, b) (z_0, c) (z_0, d)

pris chacun un certain nombre de fois.

Soit u la détermination de l'intégrale prise de z_0 à z suivant un certain chemin C. Soit A la valeur de la même intégrale prise de z_0 à $\underline{a}$ en ligne droite; sa valeur sur le lacet de $\underline{a}$ sera 2A. De même, sa valeur sur la droite (z_0, b) étant B, sa valeur sur le lacet de $\underline{b}$ sera 2B; sa valeur sur le lacet (z_0, c) sera 2C, et sur le lacet (z_0, d), 2D. Ces 4 valeurs sont prises sur chaque lacet en partant de la même détermination initiale du radical en z_0; elles changent de signe si l'on part de z_0 avec la détermination contraire. Or quand on a fait un tour autour d'un pôle, c.à d. décrit un lacet, on revient en z_0 avec la détermination contraire; si l'on décrit alors un 2e lacet (le même ou un autre) on obtient un résultat changé de signe. Donc, si l'on désigne par $k_1, k_2 \ldots\ldots$ les diverses valeurs 2A, 2B, 2C, 2D prises dans l'ordre où l'on décrit les lacets correspondants, l'intégrale prise sur un circuit quelconque se réduisant à une somme des 4 lacets pris un certain nombre de fois dans un ordre déterminé aura pour valeur: $k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + \ldots$

Si le nombre des lacets décrits est pair, cette valeur aura la forme:

$$k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + \ldots\ldots + k_{n-1} - k_n = \Sigma(k_i - k_j)$$

Or les différences $(k_i - k_j)$ sont réductibles aux 3 suivantes:

$\omega_1 = 2B - 2A$ $\quad \omega_2 = 2C - 2A$ $\quad \omega_3 = 2D - 2A$

et la valeur de l'intégrale est une expression linéaire à coefficients entiers de ces 3 quantités: $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3$

$m_1\ m_2\ m_3$ étant des entiers positifs ou négatifs.

Si le nombre des lacets est impair, on aura, abstraction faite du dernier,

le résultat précédent, valable pour tout nombre pair de lacets, auquel on devra ajouter l'intégrale prise suivant le dernier lacet ; on peut d'ailleurs s'arranger de manière que ce lacet soit celui qu'on voudra, par exemple (z_0, a) ; car au lieu d'ajouter $2D$ par exemple, on peut ajouter :

$$(2D - 2A) + 2A$$

ce qui ne fait qu'augmenter d'une unité le coefficient de ω_3. D'ailleurs $2A$ sera toujours pris positivement, car puisqu'avant de décrire le lacet de a on en a décrit un nombre pair, on est revenu en z_0 avec la détermination initiale du radical. Donc la valeur de l'intégrale prise sur un circuit équivalent à un nombre impair de lacets sera de la forme :

$$m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + m_3 \omega_3 + 2A.$$

Considérons maintenant les divers chemins qui mènent de z_0 en z, u étant la valeur de l'intégrale sur un chemin déterminé C. Tout autre chemin sera la somme de ce chemin C et d'un circuit allant de z_0 en z_0. Si le circuit équivaut à un nombre pair de lacets, on reviendra à z_0 avec la détermination initiale de la fonction, et la valeur totale de l'intégrale sera : $m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + m_3 \omega_3 + u$

Si le circuit équivaut à un nombre impair, de lacets, la fonction aura changé de signe, et l'intégrale suivant C aussi ; la valeur totale sera alors : $m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + m_3 \omega_3 + 2A - u$

Ces 2 formules comprennent toutes les déterminations possibles de l'intégrale elliptique prise de z_0 en z suivant un chemin quelconque.

Les 3 périodes $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3$ de l'intégrale elliptique ne sont pas indépendantes. Pour le prouver, prenons l'intégrale suivant les 4 lacets successifs ; elle équivaut à l'intégrale prise sur un cercle de rayon très grand qui contiendrait les 4 pôles ; or cette intégrale est nulle,

car, soit R le rayon infiniment grand de ce cercle: z est de l'ordre de R, dz aussi; le radical sera de l'ordre de R^2, donc l'élément différentiel sera de l'ordre de $\frac{1}{R}$, c.à.d. infiniment petit. Or l'intégrale est indépendante de R; donc elle est nulle.

Évaluons donc l'intégrale prise suivant les lacets; elle doit être nulle:

$2A - 2B + 2C - 2D = 0$ ou: $-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 = 0$

Il existe donc une relation linéaire entre les 3 périodes, et l'on a par exemple: $\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$.

Il ne reste donc que 2 périodes distinctes ω_1, ω_2, et on peut supprimer ω_3 dans les formules générales, ce qui revient à ajouter m_3 à m_1 et à le retrancher de m_2:

$$\begin{cases} m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + u \\ m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + 2A - u \end{cases}$$

On va prouver que ces 2 périodes ω_1, ω_2 sont bien distinctes, ou indépendantes. (si a, b, c, d sont distincts)

On peut d'abord dire outre que leur rapport est imaginaire.

Pour cela, supposons que: $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \alpha$ nombre réel.

α est commensurable ou non; on va d'abord prouver que s'il peut être incommensurable, il peut aussi être commensurable; il suffira ensuite de prouver qu'il ne peut être commensurable.

Or $\omega_1 \omega_2$ sont fonctions de a, b, c, d (comme A, B, C.)

Supposons a, b, c fixes, et $\underline{d}$ variable dans le voisinage d'un point d_0, de sorte que le p. $\underline{d}$ ne puisse se confondre avec les points a, b, c; supposons que pour $d = d_0$, $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \alpha_0$ nombre incommensurable.

Or A, B, C, D sont des fonctions holomorphes de d dans le voisinage de tout point d_0 situé en dehors des lacets; de sorte que $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \varphi(d)$ fonction holomorphe de d dans le voisinage de d_0.

On a : $\varphi(d_0) = \alpha_0$. On peut prendre un nombre commensurable α aussi voisin qu'on veut de α_0 (puisque α_0 est réel) et l'équation :

$\varphi(d) = \alpha$ aura une racine aussi voisine qu'on veut de d_0.

Donc si en un point $\underline{d_0}$ le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ est incommensurable, en un point infiniment voisin de d_0 il sera commensurable.

— Supposons maintenant α commensurable : $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m}{n}$, $\underline{m}$ et $\underline{n}$ étant 2 nombres entiers premiers entre eux.

— Posons : $\frac{\omega_2}{m} = \frac{\omega_1}{n} = \omega$ ω sera une période de l'intégrale.

Le type général des valeurs périodiques de l'intégrale est : $p\omega_2 + q\omega_1$, ou : $p\omega_2 + q\frac{n}{m}\omega_2 = \frac{\omega_2}{m}(pm + qn)$

Or $\underline{m}$ et $\underline{n}$ étant premiers entre eux, on peut trouver 2 entiers p, q tels que : $pm + qn = 1$. Donc : $\frac{\omega_2}{m}$, $\frac{\omega_1}{n}$ ou ω est une période de l'intégrale et la période unique dont les 2 autres sont des multiples. — Or il est impossible que l'intégrale elliptique ait une période unique, et c'est une propriété très importante, que nous allons démontrer.

En effet, supposons que toutes les déterminations de l'intégrale soient représentées par les 2 formules : $m\omega + u$, $m\omega + 2A - u$

Considérons l'expression : $e^{2\pi i \frac{u}{\omega}} + e^{2\pi i \frac{2A-u}{\omega}}$

C'est une fonction de z, par l'intermédiaire de u. Elle ne change pas quand on y remplace u par $(m\omega + u)$ ou par $(m\omega + 2A - u)$ car on ne fait ainsi que multiplier les 2 termes par $e^{2\pi i} = 1$, en les intervertissant dans le 2e cas. Ainsi, tandis que l'intégrale a une infinité de déterminations pour chaque valeur de z, cette fonction-ci n'en a qu'une : c'est une fonction uniforme $G(z)$. — D'autre part,

on a vu que l'intégrale elliptique reste finie pour toute valeur de z, donc u est fini même pour z infini; et comme l'exponentielle est fonction entière de u, nous avons une fonction entière $G(z)$ qui reste finie dans tout le plan, et même à l'infini : on sait (1er cahier, page 112) qu'une telle fonction se réduit à une constante; donc :

$$e^{2\pi i \frac{u}{\omega}} + e^{2\pi i \frac{2A-u}{\omega}} = K$$

équation du 2e degré en $e^{2\pi i \frac{u}{\omega}}$; mais il est impossible que u, et par conséquent $e^{2\pi i \frac{u}{\omega}}$, soient constantes; donc notre hypothèse est absurde : $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ ne peut être un nombre réel –

— Rappelons quelques propositions précédemment établies (p. 40) : Soit $f(x, y)$ une fonction analytique des 2 variables complexes x, y s'annulant pour $x=0$, $y=0$: $f(0,0)=0$, et holomorphe au voisinage du point $(x=0,\ y=0)$. Si en ce point : $\frac{\partial f}{\partial y} \gtrless 0$, l'équation : $f(x,y)=0$ définit une fonction y de x, qui vérifie cette équation au voisinage du point $x=0$, et qui s'annule pour $x=0$.

On sait décomposer $f(x,y)$ en 2 facteurs dont l'un est un polynôme en y et s'annule seul pour $x=0$; on peut décrire 2 cercles de centres $x=0$, $y=0$, et tels que si x est contenu dans l'un, l'équation : $f(x,y)$ ait n racines dans l'autre; n étant le degré du polynôme en y qui s'annule pour $x=0$:

$$f(x,y) = (y^n + \varphi_1(x) y^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} y + \varphi_n) P(x,y) \quad \left\{ P(0,0) \gtrless 0 \right.$$

Les n racines de l'équation : $f(x,y)=0$ en y sont celles de l'équation : $y^n + \varphi_1 y^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} y + \varphi_n = 0$

où l'on a donné à x dans les coefficients $\varphi_1\ \varphi_2 \ldots \varphi_n$ une valeur déterminée.

Dans le cas présent, où : $\frac{\partial f}{\partial y} \gtrless 0$ pour $x=0$, $y=0$,

on a : $n=1$; donc : $f(x,y) = \left[y + \varphi_1(x)\right] P(x,y)$

le facteur $(y+\varphi_1(x))$ s'annulant seul, la fonction implicite de x définie par l'équation : $f(x,y)=0$ dans les 2 cercles considérés n'est autre que : $y = -\varphi_1(x)$ $\qquad \varphi_1(0) = 0$.

En particulier, si l'on a l'équation : $x = G(y)$

G étant une fonction holomorphe dans le voisinage du point : $y=0$;

Si : $G(0)=0$ et si : $G'(0) \gtrless 0$,

cette équation définit une fonction y holomorphe en x dans le voisinage du point : $x=0$, et s'annulant en ce point –

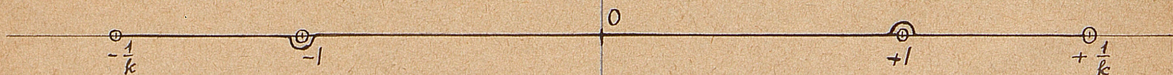
Ce lemme établi, considérons l'intégrale elliptique de 1e espèce sous la forme canonique que lui ont donnée Jacobi et Abel :

$$u = \int_0^0 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad |k|<1.$$

Elle est prise de 0 à 0, c.à.d suivant un circuit fermé comprenant l'origine. On partira de 0 avec la détermination positive de la fonction par exemple, c.à.d avec le signe + du radical. Les 4 pôles de la fonction sont ici :

$+1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$, ces 2 derniers enfermant les premiers.

Décrivons les 4 lacets correspondants. – Les 2 lacets $+1, -1$ ont la forme ordinaire. Pour les lacets $+\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$, ils devront éviter les points critiques $+1, -1$: pour cela on décrira un demi-cercle



infiniment petit au-dessus de $+1$, par exemple, et on le suivra à l'aller et au retour de $+\frac{1}{k}$; par symétrie, on suivra pour aller à $-\frac{1}{k}$ et en revenir, un demi-cercle infiniment petit tracé au-dessous de -1.

Posons :
$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

L'intégrale prise le long du lacet $+1$ est, comme on sait, égale à $2K$. Le lacet symétrique -1 donne la valeur égale et de signe contraire $-2K$. Les parties circulaires du lacet $+\frac{1}{k}$ donnent à la limite 0 pour l'intégrale ; on a donc seulement l'intégrale prise de 0 à 1, c.à.d. K, et l'intégrale prise de $+1$ à $+\frac{1}{k}$. Or dans cet intervalle, l'intégrale est purement imaginaire, la quantité soumise au radical étant constamment négative. Pour l'évaluer, faisons le changement de variable :
$$1-z = \rho e^{\theta i}$$

Quand z va de 0 à 1, ρ varie de $+1$ à 0 ; θ reste nul. Quand z tourne d'une demi-circonférence autour de $+1$, θ varie de 0 à $-\pi$; enfin quand z va de $+1$ à $+\frac{1}{k}$, ρ varie de 0 à $1-\frac{1}{k}$, et θ est constamment égal à $-\pi$, c.à.d. que la valeur de $(1-z)$ a été multipliée par $e^{-\pi i} = -1$ en passant par $+1$. Donc $\sqrt{1-z} = \rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2} i}$ a été multipliée par $e^{-\frac{\pi}{2} i} = -i$; si l'on veut conserver un radical réel, et la continuité de $(1-z)$, il faut renverser $(1-z^2)$ en (z^2-1) et multiplier le radical par $-i$, l'intégrale devient :
$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{-i\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} = i\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} = iK',$$
K' étant une quantité réelle fixe. Ainsi l'intégrale prise de 0 à $\frac{1}{k}$ a pour valeur : $K + iK'$, et prise sur le lacet $\frac{1}{k}$, $2K + 2iK'$.

Remarquons que si l'on avait évité $+1$ par un demi-cercle inférieur, θ aurait varié de $+i$, et la valeur de l'intégrale sur cet autre lacet $+\frac{1}{k}$ aurait été : $2K - 2iK'$.

La valeur de l'intégrale prise sur le lacet symétrique $-\frac{1}{k}$ est évidemment : $-2K - 2iK'$ quand on passe au-dessous de -1, comme sur la figure ; elle serait : $-2K + 2iK'$ si on passe au-dessus.

Pour avoir les 2 périodes de l'intégrale elliptique, $\omega_1\ \omega_2$, il suffit de faire la différence des valeurs que l'intégrale prend sur le 1er et le 2e lacets, puis sur le 1er et le 3e, par exemple. Prenons le lacet $+1$ et le lacet -1 ; la différence sera : $2K - (-2K) = 4K$.

Prenons le lacet $+\frac{1}{k}$ et le lacet $+1$; la différence sera :

$$2K + 2iK' - 2K = 2iK'.$$

Les 2 périodes sont donc : $4K$, $2iK'$.

L'une est réelle, l'autre est purement imaginaire.

Nous allons calculer au moyen de ces 2 périodes des valeurs remarquables de l'intégrale elliptique.

Prenons par exemple l'intégrale de 0 à ∞ suivant Ox, en évitant le point $+\frac{1}{k}$ par un demi-cercle supérieur. Les parties circulaires donnent à la limite un résultat nul. L'intégrale comprend donc 3 parties : l'une de 0 à $+1$, dont la valeur est K ; la 2e de $+1$ à $+\frac{1}{k}$, dont la valeur est iK' ; la 3e, de $+\frac{1}{k}$ à $+\infty$, que nous allons calculer. Nous avons pris, pour z compris entre $+1$ et $+\frac{1}{k}$, la forme :

$$\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}$$

Or, quand on dépasse $\frac{1}{k}$, $\sqrt{(1-k^2z^2)}$ devient imaginaire, et l'on doit faire :

$$\sqrt{1-k^2z^2} = i\sqrt{k^2z^2-1}$$

Les 2 facteurs $\underline{i}$ donnent -1 ; on doit donc prendre au-delà de $\frac{1}{k}$ la forme :

$$-\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(k^2z^2-1)}}$$

L'intégrale précédente est essentiellement positive. Pour l'évaluer, faisons le changement de variable : $z = \frac{1}{ky}$ $\quad dz = -\frac{1}{ky^2}dy$

$$-\int_1^0 \frac{-\frac{1}{k}\frac{dy}{y^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{k^2y^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)}} = -\int_1^0 \frac{-dy}{\sqrt{(1-k^2y^2)(1-y^2)}} = -\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

c. à d. $-K$. La valeur totale de l'intégrale de 0 à $+\infty$ est donc :

$$K + iK' - K = iK'.$$

L'intégrale prise de 0 à ∞ suivant Oy a la même valeur ; en effet, si l'on trace entre Ox, Oy un quart de cercle de rayon infiniment grand, l'intégrale prise sur le contour de ce quadrant (en évitant $+1$ et $+\frac{1}{k}$ par des demi-cercles supérieurs) sera nulle ; or l'intégrale prise sur le quart de cercle est nulle à la limite, donc les intégrales prises sur Ox, Oy infinis, chacune à partir de 0, sont égales. — Si l'on pose : $z = iy$, on a donc l'égalité :

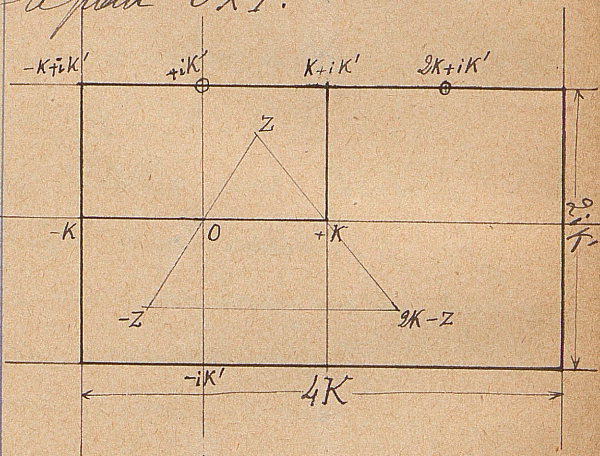
$$\int_0^{\infty} \frac{i\,dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}} = iK'$$

d'où cette expression nouvelle de K' : $\quad K' = \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}}$

En résumé, la forme générale de l'intégrale elliptique prise de 0 à un point quelconque z est, u étant une de ses déterminations, ω_1 ω_2 les 2 périodes $4K$, $2iK'$: $\quad m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + u \quad , \quad m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + 2K - u$

Nous allons représenter géométriquement les valeurs de u qui correspondent aux valeurs de z situées dans le demi-plan supérieur à Ox. Rappelons d'abord les valeurs que prend l'intégrale sur l'axe Ox; en partant de 0 : en $+1$, K ; en $+\frac{1}{k}$, $K+iK'$, en évitant $+1$ par un demi-cercle supérieur. En -1, $-K$; en $-\frac{1}{k}$, $-K+iK'$, en évitant encore -1 par un demi-cercle supérieur. Le demi-plan situé au dessus de ce contour ne contient plus aucun point critique. Représentons la valeur de l'intégrale, prise de 0 à z, par :

$Z = X + iY$ dans le plan OXY.



Quand z va de 0 à $+1$, Z va de 0 à $+K$ sur OX; quand z va de $+1$ à $+\frac{1}{k}$, Z varie de $+iK'$, parallèlement à OY; quand z va de $+\frac{1}{k}$ à $+\infty$, Z varie de $-K$, parallèlement à OX en rétrogradant; Z revient au p. $+iK'$ (sur OY) c'est bien sa valeur pour $z=+\infty$. Le contour décrit par Z, quand z va de 0 à $-\infty$ est symétrique du précédent par rapport à OY, car nous avons remarqué que de -1 à $-\frac{1}{k}$ Z varie de $+iK'$; Z se trouve donc en $+iK'$ pour $z=-\infty$ comme pour $z=+\infty$. Le rectangle ainsi décrit, qui a pour côtés $2K$, iK', correspond donc à l'axe des quantités réelles x. Nous allons prouver que la surface de ce rectangle correspond d'une manière uniforme au demi-plan des y positifs.

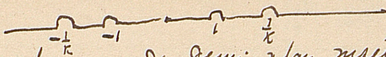
~~Et d'abord, on peut prendre l'intégrale de 0 à z par n'importe quel~~ ce rectangle représente le contour du demi-plan, car le point $+iK'$ correspond au point à l'infini qui limite le demi-plan avec l'axe des x.

chemin contenu dans le demi-plan considéré, puisqu'il ne contient plus aucun point critique : donc Z est une fonction uniforme de z, càd qu'à chaque point du demi-plan ne correspond qu'un point du rectangle. Réciproquement, z est une fonction uniforme de Z (contenu dans le rectangle) car : $Z = G(z)$ $G(0) = 0$
$G(z)$ étant une fonction holomorphe, et la dérivée :

$$\frac{dz}{dZ} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

ne s'annule en aucun point du demi-plan (délimité comme il a été dit). Il y a donc correspondance uniforme entre z et Z. De plus, quand z reste dans son demi-plan, Z ne peut sortir du rectangle correspondant : car Z reste fini même pour z infini (intégrale de 1e espèce) ; donc quand z décrit le demi-plan, Z décrit un domaine limité ; il atteint un point quelconque Z_0 de sa frontière pour une certaine valeur z_0 de z ; je dis que z_0 est sur le contour du demi-plan. En effet, la relation $Z = G(z)$ définit z comme une fonction holomorphe de Z, pourvu que z soit à l'intérieur du demi-plan et non sur son contour. Donc, si z_0 n'était pas sur ce contour, z serait holomorphe dans un cercle autour de Z_0, càd que, pour des valeurs de z contenues dans le demi-plan, Z franchirait la frontière, ce qui est contradictoire. Ainsi la frontière de Z est la transformée du contour du demi-plan, càd le contour du rectangle ; par conséquent Z ne peut sortir du rectangle. Il ne peut pas non plus y laisser de lacunes, càd que quand z décrit son demi-plan, Z décrit tout le rectangle : car on prouverait de même que Z n'admet pas de frontière intérieure au rectangle. En résumé, à tout point z du demi-plan correspond un point Z du rectangle, et réciproquement ; on sait déjà qu'il n'en correspond qu'un seul —

On a $u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$



Tout d'abord soit z_0 une valeur quelconque du demi plan supérieur. (après qu'on a détaché les 4 points critiques par des demi-cercles). Cette valeur de z_0 est donc nécessairement différente des points critiques. Donc la dérivée de l'intégrale par rapport à z n'est pour ce point ni nulle ni infinie.

La valeur correspondante de u est déterminée, puisque les points critiques sont détachés du domaine. Appelons-la u_0.

Le théorème des fonctions implicites nous apprend alors que la relation écrite ci-dessus définit une fonction ~~dz~~ z de u qui pour $u = u_0$ se réduit à z_0 et qui est holomorphe dans le voisinage de u_0. Ceci arrivera donc toujours toutes les fois que z_0 n'aura pas été pris sur la limite du demi plan.

Ceci posé, quand z décrit tout le demi plan, u décrit un certain domaine, inconnu, et à chaque valeur de z correspond une seule valeur de u dans ce domaine.

Ce domaine est nécessairement limité, puisque u est toujours finie, en qualité d'intégrale de première espèce.

Il a donc une certaine frontière, qui est nécessairement formée par une ligne continue. (ou plusieurs), et u atteindra forcément un point quelconque u_0 de cette frontière pour une valeur déterminée de z z_0. Or je dis que z_0 est nécessairement sur le contour du demi plan. Car dans le cas contraire, la fonction z de u qui se réduit à z_0 pour $u = u_0$ serait holomorphe dans le voisinage de u_0 et par suite développable en série dans le voisinage de ce point. Donc elle existerait de part et d'autre de la frontière, autrement dit u pourrait franchir cette frontière, ce qui est contradictoire. La frontière de u n'est donc autre chose que la ligne décrite par u quand z décrit le contour du demi-plan, c.à.d. le contour du rectangle. Le domaine de u est donc formé entièrement et uniquement par le rectangle.

CQFD

73 bis c

73 bis d

On a vu (1er cahier, page 107) qu'on peut représenter un demi-plan par un cercle; l'intégrale elliptique fournit donc la solution de ce problème: Trouver une représentation conforme entre un rectangle et un cercle.

Le demi-plan inférieur à Ox, limité par les demi-cercles inférieurs décrits autour des 4 points critiques, contenant des valeurs de z symétriques de celles que contient le demi-plan supérieur, sera représenté par un 2e rectangle symétrique du précédent par rapport à OX. Ainsi tout le plan z, à l'exception des 4 points critiques, est représenté, au moyen de la transformation définie par l'intégrale elliptique, par un rectangle ayant pour centre, dans le plan Z, l'origine O et pour côtés $2K$, $2iK'$.

Pour représenter toutes les valeurs distinctes de Z (nous entendrons par valeurs distinctes celles qui ne diffèrent pas de multiples exacts des périodes $4K$, $2iK'$) il faut tenir compte des 2 formules générales:

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + u \qquad \text{et} \qquad m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + 2K - u .$$

Si l'on va de 0 en z en entourant le point $+1$, cela revient à décrire le lacet $+1$ et à aller de 0 en z avec un radical changé désigné; au lieu de u, l'intégrale prend la valeur $2K-u$. Z étant la fonction uniforme définie ci-dessus dans les 2 demi-plans, on trouve ainsi la nouvelle détermination $(2K - Z)$ de la fonction, également uniforme: dans le plan des Z, elle décrira un rectangle égal au précédent, mais avancé de $2K$ dans le sens des X positifs; ce nouveau rectangle, qui contiendra toutes les valeurs de la nouvelle fonction, sera donc contigu au premier. Toutes les valeurs distinctes de Z seront contenues dans ces 2 rectangles, c.à.d. dans le rectangle total de côtés $4K$, $2iK'$. En effet toutes les

valeurs possibles de Z_1, pour une valeur déterminée de z, diffèrent des 2 valeurs : u, $2K-u$, de multiples entiers de $4K$, $2iK'$, c.à.d se trouvent réparties aux intersections d'un réseau de parallèles aux axes ayant pour équations ($Z_1 = X_1 + iY_1$ étant ds le rectangle des périodes) :

$$X = X_1 + 4mK \qquad Y = Y_1 + 2nK'$$

Si l'on partage le plan Z_1 en une infinité de rectangles égaux au rectangle des périodes, et contigus, chacun de ces rectangles contiendra toutes les valeurs distinctes de Z_1, et à chaque valeur de z correspondront dans chaque rectangle 2 valeurs de Z_1 ayant la même disposition dans tous ; d'ailleurs, la 2e valeur : $2K-Z_1$, s'obtient en prenant dans le 1er demi-rectangle $(2K, 2iK')$ le symétrique de Z_1 par rapport à son centre O, et en lui ajoutant $2K$: c.à.d. que ces 2 valeurs sont elles-mêmes symétriques par rapport au centre ($+K$ dans la figure) du rectangle des périodes.

A une valeur quelconque de Z_1, prise dans tout le plan ne correspond au contraire qu'une seule valeur de z ; donc z est une fonction uniforme de Z_1 :

$$z = \lambda(Z)$$

Cette fonction est bien déterminée dans tout le plan, et n'a que des pôles. Si l'on prend un point Z_1 qui ne corresponde à aucun des points critiques ± 1, $\pm \frac{1}{k}$, ni à $z = \infty$, c.à.d qui ne soit ni un sommet du petit rectangle primitif $(2K, iK')$ ni le milieu de son côté supérieur $(+iK')$ la fonction z sera holomorphe au voisinage de ce point.

Reste à savoir si elle est encore holomorphe au voisinage des points critiques que nous venons d'énumérer. Or au point $Z = +K$, correspond le point $z = +1$; la dérivée :

$$\frac{dz}{dZ} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

devient nulle, et le théorème ne peut plus s'appliquer. Mais si l'on fait le changement de variable : $z = 1 + z'^2$

$$dZ = \frac{2z'dz'}{z'\sqrt{-(1+z)(1-k^2z^2)}} = \frac{2dz'}{\sqrt{-(2+z'^2)(1-k^2z^2)}}$$

on voit que la dérivée est finie pour le point $z'=0$ qui correspond au p. $z=1$; donc la fonction z est holomorphe au point K.

On raisonnerait de même pour les autres points critiques. Quant au point $z=\infty$, on fait le changement de variable : $z = \frac{1}{z'}$, et on trouve que la dérivée est finie pour $z'=0$, ou $z=\infty$.

Dans tous les cas, la fonction z est développable en série de Taylor ; au voisinage du point iK', z' est développable, et s'annule pour ce point ; c'est donc un pôle de la fonction z. Cette fonction n'a donc que des pôles dans le plan, et ces pôles sont donnés par les 2 formules :

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + iK'$$
$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + 2K - iK'$$

on pourrait aussi bien écrire : $2K + iK'$, cela revient à ajouter la période $2iK'$ – Les pôles se trouvent à l'intersection des parallèles aux axes définies par les équations : $X = 2mK$, $Y = (2n+1)K'$

Il n'y a donc que 2 pôles distincts : $+iK'$, $2K+iK'$, qui se répètent indéfiniment dans chaque rectangle du plan Z.

Nous venons de faire l'inversion de la fonction elliptique :

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

la fonction inverse : $z = \lambda(u)$ admet 2 pôles distincts : iK', $2K+iK'$ dans chaque rectangle des périodes.

Elle prend des valeurs égales, en chaque rectangle, en 2 points quelconques symétriques par rapport au centre du rectangle:

$$\lambda(2K-u) = \lambda(u)$$

De plus c'est une fonction impaire, car elle change de signe avec u en gardant la même valeur absolue: $\lambda(-u) = -\lambda(u)$

Donc: $\lambda(2K+u) = \lambda(-u) = -\lambda(u)$

c.à.d. quand on ajoute à u une demi-période réelle, la fonction λ change de signe.

Prenons l'intégrale de 0 à un p. x situé sur l'axe réel, au delà du point $\frac{1}{k}$, en évitant les 2 points critiques par des demi-cercles supérieurs:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

On sait que cette intégrale se compose de K, de iK', et de l'intégrale:

$$\int_{\frac{1}{k}}^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_{\frac{1}{k}}^\infty - \int_x^\infty = -K + \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}$$

Donc: $$u = iK' + \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}$$

Posons: $x = \frac{1}{ky}$: la dernière intégrale devient:

$$\int_y^0 \frac{-\frac{1}{k}\frac{dy}{y^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{k^2y^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$ Donc

$$u = iK' + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \qquad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = u - iK'.$$

En faisant l'inversion, si : $x = \lambda(u)$, $y = \lambda(u - iK')$

Or : $x = \dfrac{1}{ky}$ $y = \dfrac{1}{kx}$ Donc : $\lambda(u - iK') = \dfrac{1}{k\lambda(u)}$.

ou, en ajoutant $2iK'$ à u : $\lambda(u + iK') = \dfrac{1}{k\lambda(u)}$.

Cherchons maintenant le résidu de la fonction λ pour chacun de ses pôles. ~~Pour le pôle iK',~~ En général, le résidu relatif à un pôle simple a d'une fonction $f(z)$ est : $\lim\limits_{z=a} f(z)(z-a)$ puisque c'est le coefficient A dans le développement :

$$f(z) = \frac{A}{z-a} + B + C(z-a) + \ldots\ldots$$

Donc, pour le pôle iK', le résidu de λ est : $\lim \lambda(u)(u - iK')$ pour $u = iK'$. Or cette expression prend la forme indéterminée $\infty \times 0$.

Posons : $u = iK' + \varepsilon$; on a : $\lim\limits_{\varepsilon=0} \lambda(iK' + \varepsilon)\,\varepsilon$

En vertu de la formule précédente, c'est : $\lim\limits_{\varepsilon=0} \dfrac{\varepsilon}{k\lambda(\varepsilon)}$

Or : $\lim \dfrac{\varepsilon}{\lambda(\varepsilon)} = \dfrac{1}{\lambda'(0)}$ $\lambda'(0) = 1$

$\dfrac{dz}{dZ} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$

Donc le résidu est : $\dfrac{1}{k}$.

Pour le 2e pôle : $2K + iK'$, on doit chercher : $\lim \lambda(u)(u - 2K - iK')$

Posons : $u = 2K + iK' + \varepsilon$ $\lambda(2K + iK' + \varepsilon)\,\varepsilon = -\lambda(iK' + \varepsilon)\,\varepsilon$

C'est la même expression changée de signe ; le résidu est donc $-\dfrac{1}{k}$.

Ainsi les 2 résidus sont égaux et de signes contraires, comme on pouvait s'y attendre.

La fonction $\lambda(u)$, uniforme dans tout le plan et n'ayant que

des pôles, peut, en vertu du théorème de Weierstrass (1er cahier, page 133) se mettre sous la forme : $\frac{G_1(u)}{G(u)} = \lambda(u)$

G et G_1 étant des fonctions entières sans racines communes.

Nous allons obtenir une fonction $G(u)$ remplissant cette condition. Cette fonction doit avoir pour racines les pôles de $\lambda(u)$, afin que $G(u)\,\lambda(u)$ n'ait plus aucune discontinuité, et soit une fonction entière : $G_1(u)$ — On peut trouver une telle fonction $G(u)$ au moyen de $\lambda(u)$.

Considérons l'intégrale : $\int_0^u \lambda^2(u)\,du$

C'est une fonction uniforme de u.

En effet, $\lambda^2(u)$ est doublement périodique, mais ses périodes sont $2K$, $2iK'$: car elle a la même valeur quel que soit le signe de $\lambda(u)$. Elle n'a qu'un pôle distinct, à savoir iK', puisqu'elle a les mêmes pôles que $\lambda(u)$, et quel autre se trouve dans un autre rectangle des périodes. C'est d'ailleurs un pôle double, puisque $\lambda(u)$ est élevé au carré ; il en résulte que le résidu de $\lambda^2(u)$, relatif à ce pôle sera nul.

Considérons en effet : $\lambda(\varepsilon + iK') = \frac{1}{k\lambda(\varepsilon)}$

$\lambda(\varepsilon)$ est une fonction impaire, donc :

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon + \alpha\varepsilon^3 + \beta\varepsilon^5 + \dots$$

$$\lambda(\varepsilon + iK') = \frac{1}{k\varepsilon(1 + \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^4 + \dots\dots)}$$

Il n'y aura donc que des termes pairs dans le développement de

$$\lambda^2(\varepsilon + iK')$$

et le 1er sera: $\frac{1}{k^2\varepsilon^2}$ — Le résidu sera donc nul, puisqu'il n'y a pas de terme en $\frac{1}{\varepsilon}$. Il n'y aura donc pas de terme logarithmique dans l'intégrale, et celle-ci n'aura pas de pôle.

Intégrons encore une fois: $\int^u du \int^u \lambda^2(u)\,du$

Cette nouvelle intégrale n'est plus uniforme, car en intégrant le 1er terme, on aura: $-\frac{1}{k^2\varepsilon}$ qui donne le résidu: $-\frac{1}{k^2}$.

Ainsi cette nouvelle intégrale admet le pôle iK' comme $\lambda^2(u)$.

En intégrant ~~encore~~ la 2e fois on trouve: $-\frac{1}{k^2}\log\varepsilon = -\frac{1}{k^2}\log(u-iK')$

qui devient infini pour $u=iK'$. Telle est la partie qui est discontinue au pôle iK'. — Multiplions par $-k^2$ pour détruire le coefficient, et faisons de cette expression l'exposant de e, nous aurons:

$$e^{-k^2\int du \int \lambda^2(u)\,du} = e^{\log(u-iK')} \cdot e^{P(u)}$$

$$= (u-iK')\,e^{P(u)}$$

P étant une fonction holomorphe. Cette exponentielle s'annule donc pour $u=iK'$, et est holomorphe dans tout le plan; posons:

$$G(u) = e^{-k^2\int du \int \lambda^2(u)\,du}$$

Cette fonction $G(u)$ est entière, et a pour racines les pôles de $\lambda^2(u)$, qui se déduisent du 1er par la formule: $iK' + 2mK + 2niK'$ c.à.d. tous les pôles de $\lambda(u)$. — Cette fonction ne diffère que par une exponentielle des fonctions Θ étudiées par Abel et Jacobi.

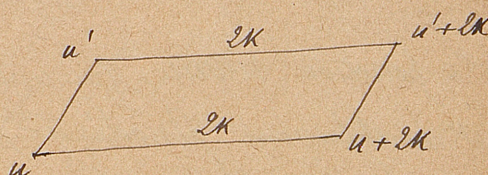
Prenons sa dérivée logarithmique: $\frac{G'(u)}{G(u)} = -k^2\int_0^u \lambda^2(u)\,du$

On aurait de même : $\dfrac{G'(u+2K)}{G(u+2K)} = -k^2 \displaystyle\int_0^{u+2K} \lambda^2(u)\,du$

Donc : $\dfrac{G'(u+2K)}{G(u+2K)} - \dfrac{G'(u)}{G(u)} = -k^2 \displaystyle\int_u^{u+2K} \lambda^2(u)\,du$

Le 2e membre est constant, parce que $2K$ est la période réelle de $\lambda^2(u)$. En effet, on a identiquement : $\displaystyle\int_u^{u+2K} \lambda^2(u)\,du = \int_{u'}^{u'+2K} \lambda^2(u)\,du$

car l'intégrale prise le long du parallélogramme $(u, u', u+2K, u'+2K)$ est nulle, le résidu relatif au pôle étant nul ; or les intégrales prises de u à u' et de $(u+2K)$ à $(u'+2K)$ sont égales, les valeurs de u étant identiques sur les 2 lignes ; donc les intégrales prises suivant les côtés $2K$ sont égales. On peut donc écrire :



$$\frac{G'(u+2K)}{G(u+2K)} - \frac{G'(u)}{G(u)} = H$$

en posant : $H = -k^2 \displaystyle\int_0^{2K} \lambda^2(u)\,du = \text{const.}$

Intégrons : $\log G(u+2K) - \log G(u) = Hu + H'$

H' étant une 2e constante ; ou, en passant aux nombres

$$G(u+2K) = G(u)\, e^{Hu+H'}$$

Ainsi la fonction entière G se reproduit après la période $2K$ multipliée par une exponentielle linéaire en u. La même conclusion s'applique à la période imaginaire $2iK'$ de $\lambda^2(u)$, puisque les raisonnements précédents s'appuient sur la périodicité ; on a donc aussi : $G(u+2iK') = G(u)\, e^{H_1 u + H_1'}$

On est ainsi ramené à étudier les fonctions entières ~~périodiques~~ $G(u)$.

On peut généraliser quelques-uns des résultats précédents et les étendre sans difficulté au cas d'une ~~polynôme~~ intégrale elliptique quelconque, non mise sous forme canonique, c.à.d. au cas où le radical contient, non un trinôme bicarré, mais un polynôme général du 4e degré :

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E}}.$$

La fonction inverse, que nous appellerons encore $z = \lambda(u)$ est doublement périodique, et a 2 pôles dans chaque parallélogramme des périodes. On peut écrire : $\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E$

Soient α, β les 2 pôles distincts ; au voisinage de α, z peut se mettre sous la forme : $z = \frac{a}{u-\alpha} + b + c(u-\alpha) + \ldots\ldots = \lambda(u)$

Donc : $\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \left[-\frac{a}{(u-\alpha)^2} + c + \ldots\ldots\right]^2 =$

$$A\left[\frac{a}{u-\alpha} + b + c(u-\alpha) + \ldots\right]^4 + B\left[\frac{a}{u-\alpha} + b + \ldots\right]^3 + C\left[\frac{a}{u-\alpha} + b + \ldots\right]^2 + D\left[\frac{a}{u-\alpha} + \ldots\right] + E$$

Égalons les coefficients de $\frac{1}{(u-\alpha)^4}$ dans les 2 développements :

$a^2 = Aa^4$ ou : $Aa^2 = 1$ $\quad a = \pm\frac{1}{\sqrt{A}}$

Tel est le résidu relatif au pôle α ; les résidus relatifs aux 2 pôles étant égaux et de signes contraires, on a ainsi les 2 résidus de la fonction $\lambda(u)$, seulement on ne sait auquel des

2 pôles affectés chacun de eux. Egalons encore les coefficients des termes en $\frac{1}{(u-\alpha)^3}$: $0 = 4Aa^3b + Ba^3$ $\qquad b = -\frac{B}{4A}$

Le terme b est ainsi déterminé, et l'on voit qu'il est le même pour les 2 pôles.

On peut étendre à ce cas général la représentation de la fonction entière $G(u)$ par une exponentielle. Cherchons 2 coefficients constants P, Q, tels que : $\int_0^u [P\lambda^2(u) + Q\lambda(u)]\,du$

Soit une fonction uniforme et que :

$$e^{\int_0^u du \int_0^u [P\lambda^2(u) + Q\lambda(u)]\,du}$$

Soit une fonction entière $G(u)$. — Or on peut trouver P, Q en fonction de a, b. Pour le pôle α, par exemple, $\underline{a}$ a une de ses 2 déterminations ; il faut que la fonction : $[P\lambda^2(u) + Q\lambda(u)]$ n'ait pas de résidu relatif à ce pôle ; développons-la :

$$P\left[\frac{a}{u-\alpha} + b + c(u-\alpha) + \dots\right]^2 + Q\left[\frac{a}{u-\alpha} + b + c(u-\alpha) + \dots\right]$$

Le coefficient de $\frac{1}{u-\alpha}$ dans ce développement doit être nul ; donc : $2Pab + Qa = 0$ $\qquad 2Pb + Q = 0$ $\qquad \frac{P}{Q} = \frac{2A}{B}$

Ce résultat est dû à ce que $\underline{b}$ est entièrement connu.

La 1e intégrale n'aura donc pas de résidu. Mais le terme : $\frac{Pa^2}{(u-\alpha)^2}$ donne ds cette intégrale : $\frac{-Pa^2}{u-\alpha}$

qui donne à son tour dans la 2e : $-Pa^2 \log(u-\alpha)$

Pour réduire à l'unité ce coefficient : $-Pa^2 = 1$,

il faudra prendre : $P = -\frac{1}{a^2}$.

P se trouve déterminé ; car, si la valeur de a pour chaque pôle est ambiguë, a^2 est parfaitement déterminé ; connaissant P, on connaîtra Q. On aura donc la même combinaison analytique donnant une fonction $G(u)$ holomorphe dans tout le plan et ayant pour racines les pôles de la fonction $z = \lambda(u)$.

Théorie des équations différentielles.

Nous établirons d'abord un théorème fondamental touchant l'existence de l'intégrale d'une équation différentielle ordinaire du 1[er] ordre :
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

On s'est souvent contenté d'en donner une démonstration intuitive au moyen d'une construction géométrique. Dans un système de coordonnées rectangulaires planes, on considère le point initial $(x_0 y_0)$; on subdivise l'intervalle (x_0, X) en intervalles suffisamment petits Δx (égaux ou inégaux). On prend d'abord :

$\Delta y_1 = f(x_0 y_0)\,\Delta x_1$ et on pose : $x_1 = x_0 + \Delta x_1$ $y_1 = y_0 + \Delta y_1$.

On a ainsi un p. $(x_1 y_1)$ voisin du p. $(x_0 y_0)$. On prend ensuite :

$\Delta y_2 = f(x_1 y_1)\,\Delta x_2$ et on pose : $x_2 = x_1 + \Delta x_2$ $y_2 = y_1 + \Delta y_2$

On a un nouveau point $(x_2 y_2)$ voisin du p. $(x_1 y_1)$ et ainsi de suite ; on obtient finalement pour X une valeur Y de y, et on a une suite de points de $(x_0 y_0)$ à $(X Y)$. Si l'on fait décroître indéfiniment les intervalles Δx, les intervalles Δy décroissent indéfiniment, et la suite des points intercalés entre $(x_0 y_0)$ et $(X Y)$, dont le nombre tend vers l'infini, a pour limite un arc de courbe qui représente dans l'intervalle (x_0, X) la fonction y de x définie par l'équation différentielle ; de sorte que la valeur finale Y est bien déterminée.

La démonstration suivante, qui est due à Cauchy, consiste à mettre sous une forme analytique rigoureuse les considérations géométriques que nous venons d'exposer.

Dans le cas où y ne figure pas dans l'équation différentielle, on a simplement : $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

et on obtient y par une quadrature. Pour le démontrer, on subdivise l'intervalle $(x_0 X)$ par les points intermédiaires $x_1 x_2 \ldots$ sur Ox ; les valeurs correspondantes $y_1 y_2 \ldots Y$ de y sont données de proche en proche par les formules :

$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0)$ $\quad y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) f(x_1) \ldots$ etc

de sorte qu'on a finalement, en ajoutant ces égalités :

$$Y - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots\ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

Quand on fait tendre tous les intervalles vers 0 et leur nombre vers l'infini, cette somme tend vers une limite fixe qui est par définition l'intégrale définie : $\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$

et qui est la solution (à une constante additive près) de l'équation différentielle : $\frac{dy}{dx} = f(x)$

Nous allons suivre la même marche pour établir l'existence de l'intégrale de l'équation : $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Pour cela, on subdivisera l'intervalle (x_0, X) par les points intermédiaires $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$, et on leur fera correspondre les valeurs $y_1 y_2 \ldots y_{n-1}$ de y par les formules successives :

$$y_1 - y_0 = f(x_0 y_0)(x_1 - x_0)$$
$$y_2 - y_1 = f(x_1 y_1)(x_2 - x_1)$$
$$\text{— — — —}$$
$$Y - y_{n-1} = f(x_{n-1} y_{n-1})(X - x_{n-1})$$

En ajoutant toutes ces égalités, on en tire la valeur de Y :

$$Y = \Phi(x_0 y_0, X, x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots x_{n-1})$$

Il s'agit de montrer que cette fonction Φ tend vers une limite déterminée quand les intervalles des x tendent vers 0, leur nombre tendant vers l'infini.

Nous supposerons que $f(x, y)$ est continue dans le voisinage du point $(x_0 y_0)$ c.à.d. dans le champ défini par les inégalités :

$$x_0 - a < x < x_0 + a \qquad y_0 - b < y < y_0 + b$$

Cela veut dire que, étant donnée une quantité fixe λ, on pourra trouver un nombre δ tel que si l'on a : $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$

on ait : $|f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)| < \lambda$

le point $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ étant, ainsi que le p. (x, y) dans le champ délimité plus haut. La fonction est même, dans ces conditions, uniformément continue dans ce champ.

Nous supposerons de plus que si y, y' sont 2 valeurs comprises dans l'intervalle $(y_0 - b, y_0 + b)$, on a :

$$|f(x, y') - f(x, y)| < k(y' - y)$$

k étant une quantité finie. Cela a lieu en particulier si la fonction $f(x y)$ a une dérivée partielle par rapport à y, car alors on a en vertu du théorème des accroissements finis :

$$f(x, y') - f(x, y) = (y' - y)\, f'_y(y + \theta(y' - y)) \qquad 0 < \theta < 1.$$

On peut remarquer que cette 2e hypothèse n'est pas nécessaire dans le cas d'une quadrature, où elle n'aurait pas de sens.

Dans ces conditions, la fonction Φ aura une limite, mais pas

dans tout le champ considéré : soit M le module maximum de $f(x,y)$ dans ce champ ; prenons une quantité fixe A telle que l'on ait à la fois : $A \leq a$, $MA \leq b$

et astreignons x à la nouvelle inégalité double :

$$x_0 - A < x < x_0 + A$$

(Cette inégalité sera plus restreinte que la première, si $a > \frac{b}{M}$.)

Nous supposons que X, et par conséquent l'intervalle entier $(x_0 X)$ tombe entre ces nouvelles bornes du champ. Nous allons montrer que les valeurs $y_1\, y_2 \ldots\ldots Y$ se trouvent dans ce même champ, où la fonction f est définie et continue. — En effet,

$y_1 - y_0 = f(x_0 y_0)(x_1 - x_0)$ donc $|y_1 - y_0| < MA < b$

$y_2 - y_0 = f(x_0 y_0)(x_1 - x_0) + f(x_1 y_1)(x_2 - x_1)$

$|y_2 - y_0| < M(x_1 - x_0) + M(x_2 - x_1) = M(x_2 - x_0) < MA < b$

et ainsi de suite jusqu'à : $Y - y_0 < MA < b$

puisque : $X - x_0 < A$.

Cela posé, abordons la démonstration du théorème —

Considérons d'abord une loi de décomposition progressive de l'intervalle $(x_0 X)$ telle, qu'on passe d'un mode de décomposition au suivant en subdivisant les intervalles du premier ; de sorte que tous les points de division de chaque mode de décomposition subsistent indéfiniment dans les décompositions successives.

Soit un 1er mode de décomposition (x) ; $x_0\, x_1\, x_2 \ldots\ldots x_\alpha\, x_{\alpha+1} \ldots\ldots X$

et soit le mode suivant (x') : $x_0\, x'_1\, x'_2 \ldots\ldots x'_m \ldots x'_n \ldots\ldots X$

où : $x'_m = x_\alpha$, $x'_n = x_{\alpha+1}$. Entre x'_m et x'_n s'intercalent un certain nombre de nouveaux points de division, comme x'_k —

Nous désignerons par les mêmes indices les valeurs correspondantes de y obtenues de proche en proche au moyen des formules connues.
Nous cherchons une limite supérieure de la différence entre Y et Y', valeurs finales obtenues par ces 2 modes de décomposition.
Pour cela, nous allons établir une inégalité entre la différence des valeurs de y pour x'_n et $x_{\alpha+1}$, et la différence des valeurs de y pour x'_m et x_α : autrement dit, entre :

$$(y'_n - y_{\alpha+1}) \quad \text{et} \quad (y'_m - y_\alpha)$$

Or, on a toujours : $\quad y'_K - y'_m = f(x'_m, y'_m)(x'_K - x'_m)$

d'où : $\quad |y'_K - y'_m| < M|x'_K - x'_m| \quad$ quel que soit K entre m et n

Supposons que l'on ait pris un mode de décomposition (n) assez avancé dans la suite considérée pour qu'on ait :

$$M|x_{\alpha+1} - x_\alpha| < \delta$$

ce qui est toujours possible, puisque λ étant donné à l'avance on lui fait correspondre une quantité fixe δ. On aura donc quel que soit K : $\quad |y'_K - y'_m| < \delta \quad$ en même temps que :

$$|f(x'_K y'_K) - f(x'_m y'_m)| < \lambda$$ en vertu de la continuité

On a les formules :

$$y'_{m+1} - y'_m = (x'_{m+1} - x'_m) f(x'_m y'_m)$$
$$y'_{m+2} - y'_{m+1} = (x'_{m+2} - x'_{m+1}) f(x'_{m+1} y'_{m+1})$$
$$y'_n - y'_{n-1} = (x'_n - x'_{n-1}) f(x_{n-1} y_{n-1})$$

Ajoutons :

$$y'_n - y'_m = (x'_n - x'_m)\left[f(x'_m y'_m) + \theta\lambda\right]$$
$$0 < \theta < 1$$

car en remplaçant $f(x'_{m+1}\, y'_{m+1}) \ldots\ldots f(x'_{n-1}\, y'_{n-1})$
par $f(x'_m\, y'_m)$ on commet chaque fois une erreur moindre que λ.
Rapprochons les 2 égalités correspondant aux 2 modes de décomposition:

$$y_{\alpha+1} - y_\alpha = (x_{\alpha+1} - x_\alpha)\, f(x_\alpha\, y_\alpha)$$

$$y'_n - y'_m = (x_{\alpha+1} - x_\alpha)\left[f(x'_m\, y'_m) + \theta\lambda\right]$$

$$y'_n - y_{\alpha+1} = y'_m - y_\alpha + (x_{\alpha+1} - x_\alpha)\left[f(x_\alpha, y'_m) - f(x_\alpha, y_\alpha) + \theta\lambda\right]$$

ce qui donne, en vertu de notre 2e hypothèse:

$$|y'_n - y_{\alpha+1}| \leq |y'_m - y_\alpha| + |x_{\alpha+1} - x_\alpha|\left[k\,|y'_m - y_\alpha| + \lambda\right]$$

Telle est l'inégalité cherchée entre $(y'_n - y_{\alpha+1})$ et $(y'_m - y_\alpha)$ –
Or on a à l'origine de l'intervalle $y'_0 = y_0$; on peut donc comparer de proche en proche y et y' en tous les points de division du 1er mode (x) – Cherchons d'abord à mettre sous une forme simple l'inégalité que nous venons de trouver.

Si l'on avait une suite: $V_0\ V_1\ V_2 \ldots\ldots$ où $V_0 = 0$, définie par la relation récurrente: $V_{\alpha+1} = V_\alpha + |x_{\alpha+1} - x_\alpha|\left[k V_\alpha + \lambda\right]$
chaque différence: $(y'_n - y_{\alpha+1})$ serait plus petite que le terme correspondant de cette suite: $V_{\alpha+1}$.
Cherchons donc une expression simple de $V_{\alpha+1}$:

$$\left(V_{\alpha+1} + \frac{\lambda}{k}\right) = \left(V_\alpha + \frac{\lambda}{k}\right) + k\,|x_{\alpha+1} - x_\alpha|\left[V_\alpha + \frac{\lambda}{k}\right]$$

ou:

$$\left(V_{\alpha+1} + \frac{\lambda}{k}\right) = \left(V_\alpha + \frac{\lambda}{k}\right)\left[1 + k(x_{\alpha+1} - x_\alpha)\right]$$

Comme $V_0 = 0$, $\quad V_1 = \frac{\lambda}{k}\left[1 + k(x_1 - x_0)\right]$ et généralement:

$$V_{\alpha+1} + \frac{\lambda}{k} = \frac{\lambda}{k}\left(1+k(x_1-x_0)\right)\left(1+k(x_2-x_1)\right)\ldots\ldots\left(1+k(x_{\alpha+1}-x_\alpha)\right)$$

Or: $1+ka < e^{ka}$. On peut donc écrire :

$$V_{\alpha+1} + \frac{\lambda}{k} < \frac{\lambda}{k} e^{k|x_{\alpha+1}-x_0|} \qquad V_{\alpha+1} < \frac{\lambda}{k}\left[e^{k(x_{\alpha+1}-x_0)} - 1\right]$$

On a donc enfin : $\left|y'_n - y_{\alpha+1}\right| < \frac{\lambda}{k}\left[e^{k|x_{\alpha+1}-x_0|} - 1\right]$

et en particulier, pour les valeurs finales de y, y' :

$$\left|Y'-Y\right| < \frac{\lambda}{k}\left[e^{k(X-x_0)} - 1\right]$$

Or Y' représente la valeur trouvée pour y correspondante à X dans un mode de décomposition comprenant les mêmes points de division que le mode (x); le résultat précédent est donc valable pour tous les modes de décomposition qui suivent celui-là ; donc :

Pour tous les modes successifs de décomposition à partir de celui où :

$|x_{\alpha+1} - x_\alpha| < \delta$ $\quad |y_{\alpha+1} - y_\alpha| < \delta$ $\quad$ δ correspondant à λ,

la valeur finale trouvée pour y oscille dans un intervalle :

de $Y - \frac{\lambda}{k}\left[e^{k(X-x_0)} - 1\right]$ à $Y + \frac{\lambda}{k}\left[e^{k(X-x_0)} - 1\right]$

Comme la quantité entre crochets est finie et fixe, et que l'on peut prendre λ aussi petit qu'on veut, on voit que la valeur finale de y, quand les intervalles tendent vers 0, tend vers une limite déterminée.

Ce que nous venons de dire s'applique à une suite de décompositions obtenues en subdivisant indéfiniment les intervalles déjà obtenus. Pour que nos conclusions soient générales, il nous faut maintenant

considérer 2 modes de décomposition quelconques (x) (x') qui peuvent n'avoir aucun point de division commun. Pour les comparer, prenons un 3e mode de décomposition (x'') comprenant tous les points de division des 2 premiers ; il pourra être considéré comme obtenu en subdivisant, soit les intervalles de (x'), soit ceux de (x). En lui appliquant, dans ces 2 hypothèses, le résultat précédent, on peut écrire :

$$|Y''-Y'| < \frac{\lambda}{k}\left[e^{k(X-x_0)}-1\right] \qquad |Y''-Y| < \frac{\lambda}{k}\left[e^{k(X-x_0)}-1\right]$$

en supposant que les intervalles de (x) et (x') soient tous plus petits que δ. On en conclut :

$$|Y'-Y| < 2\frac{\lambda}{k}\left[e^{k(X-x_0)}-1\right]$$

Ainsi la différence entre les valeurs finales de y obtenues par 2 modes de décomposition quelconques peut être rendue aussi petite qu'on veut, pourvu que les intervalles de ces 2 modes soient suffisamment petits ; c.à.d. que ces valeurs tendent vers une même limite quand les intervalles tendent vers 0.

Ainsi, quelle que soit la loi de décomposition de l'intervalle $(x_0 X)$ on trouve pour y la même valeur Y correspondant à X, quand on fait tendre les intervalles vers 0 et leur nombre vers l'infini ; cette valeur se réduit à y_0 pour $X = x_0$, c.à.d. que c'est une fonction continue et uniforme de x dans l'intervalle $(x_0 X)$.

— Il reste à prouver que cette fonction y vérifie l'équation différentielle : $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Prenons une valeur $x' > x$, en supposant $|x'-x| < \delta$.
Soit y la valeur de la fonction en x, y' sa valeur en x'.

Si l'on opère sur l'intervalle (x, x') par subdivisions successives indéfinies, en partant de la valeur y en x, on trouve à la limite y' en x' — Si au contraire on ne fractionne pas l'intervalle (x, x') on trouvera une valeur Y' différente de y', par la formule :

$$Y' - y = f(x, y)(x' - x)$$

Y' et y' sont les résultats de 2 modes de décomposition de l'intervalle (x, x') dont l'un n'a aucun point de division, et l'autre une infinité — On peut leur appliquer le théorème, et écrire l'inégalité :

$$\left| Y' - y' \right| < \frac{\lambda}{k}\left[e^{k(x'-x)} - 1\right] \quad \text{ou :} \quad Y' - y' = \theta \frac{\lambda}{k}\left[e^{k(x'-x)} - 1\right]$$

Des 2 dernières égalités on conclut :

$$y' - y = (x' - x) f(x, y) - \theta \frac{\lambda}{k}\left[e^{k(x'-x)} - 1\right] \quad \text{ou :}$$

$$\frac{y' - y}{x' - x} = f(x, y) - \frac{\theta \lambda}{k} \frac{e^{k(x'-x)} - 1}{x' - x}$$

Si l'on fait tendre λ vers 0, δ diminue indéfiniment, et l'intervalle $(x' - x)$ tend vers 0 ; or $\dfrac{e^{k(x'-x)} - 1}{x' - x}$ reste fini pour $x' = x$; donc le dernier terme tendra vers 0 avec λ. D'autre part, $\dfrac{y' - y}{x' - x}$ tendra vers $\dfrac{dy}{dx}$; on aura donc : $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

L'équation différentielle est donc vérifiée par la fonction y que nous venons de définir.

Cette intégrale de l'équation différentielle est définie et continue dans l'intervalle : $(x_0 - A,\ x_0 + A)$

Nous allons prouver de plus qu'elle est unique. Supposons en effet

qu'il y ait une seconde solution de l'équation différentielle; on pourrait toujours la mettre sous la forme d'une somme:

$y + u$ où $\underline{u}$ est une fonction (non constante) de x — On aurait à la fois, par hypothèse:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dx} = f(x, y+u) \quad \text{D'où:}$$

$$\frac{du}{dx} = f(x, y+u) - f(x, y) = u \cdot \frac{f(x, y+u) - f(x, y)}{u} = u\,\varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant une fonction qui reste inférieure en valeur absolue au nombre k qui figure dans l'inégalité:

$$|f(x, y+u) - f(x, y)| < ku$$

~~et continue~~, sauf peut-être pour les valeurs de x où $\underline{u}$ s'annule. On a:

$$\frac{du}{u} = \varphi(x)\, dx$$

Intégrons, en partant du point x_1, jusqu'à une valeur quelconque de x entre x_1 et x_0:

$$\log \frac{u}{u_1} = \int_{x_1}^{x} \varphi(x)\, dx$$

Nous supposons que $\underline{u}$ n'est pas identiquement nulle, sans quoi le théorème serait démontré. Prenons donc un point x_1 voisin de x_0, et où $u_1 \gtrless 0$ ($u = 0$ pour $x = x_0$, puisque les 2 intégrales doivent y prendre la même valeur y_0.) Si entre x_1 et x_0 u s'annule, en ξ par exemple, intégrons de x_1 à ξ; $\log \frac{u}{u_1}$ devient infini, tandis que l'intégrale du 2e membre reste finie; l'égalité est donc impossible — Admettons donc que $\underline{u}$ ne s'annule pas entre x_1 et x_0, et intégrons de x_1 à x_0; $\log \frac{u_0}{u_1}$ est infini, tandis que l'intégrale $\int_{x_1}^{x_0}$ reste toujours finie; l'égalité est encore impossible; notre hypothèse

est donc absurde, et u est identiquement nulle, ce qui prouve que y est la seule solution (à une constante près) de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

— Nous allons donner une seconde démonstration de ce même théorème, en procédant par approximations successives, au lieu de partager l'intervalle en intervalles ~~infiniment~~ de plus en plus petits et de déterminer la fonction y de proche en proche par des différences finies.

Partons encore du système de valeurs x_0, y_0 ; l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y_0)$$

détermine une certaine fonction y de x, par une quadrature, à une constante près ; cette fonction y sera entièrement définie si l'on se donne sa valeur pour $x = x_0$, par exemple y_0 :

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx$$

Substituons cette fonction bien déterminée de x dans l'équation différentielle, qui devient :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y_1)$$

Le 2e membre ne dépendant que de x, on en tire par une nouvelle quadrature une fonction de x qu'on détermine complètement en l'assujettissant à prendre la valeur y_0 pour $x = x_0$:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx$$

En substituant de même y_2 dans $f(x, y)$ on déterminerait une nouvelle fonction y_3 en lui assignant la valeur y_0 ~~$y_1 = y_2$~~ pour $x = x_0$, et ainsi de suite indéfiniment :

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx$$

On a une suite indéfinie de fonctions $y_1\ y_2 \ldots\ldots y_n \ldots\ldots$ qui prennent toutes la valeur y_0 pour $x = x_0$. On va prouver d'abord que lorsque n augmente indéfiniment, ces fonctions tendent vers une limite qui est une fonction continue de x ; et ensuite, que celle-ci satisfait à l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Remarquons d'abord que toutes ces fonctions successives, quand x reste compris dans l'intervalle $(x_0 - A, x_0 + A)$ défini plus haut, restent comprises dans l'intervalle $(y_0 - b, y_0 + b)$, c.à.d. dans le champ où $f(x, y)$ se trouve définie. En effet, on a :

$$|y_1 - y_0| < M|x - x_0| < Ma < b$$

et de même, en général :

$$|y_n - y_0| < M|x - x_0| < Ma < b$$

Étudions maintenant la loi de décroissance de la différence de 2 fonctions consécutives ; posons : $y_n - y_{n-1} = u_n$.

On a d'abord :

$$u_1 = \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx \qquad |u_1| < M|x - x_0|$$

Assujettissons x à rester dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ δ étant inférieur ou égal à A. On aura : $|u_1| < M\delta$

On a ensuite :

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx} = f(x, y_1) - f(x, y_0)$$

Or :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_0)| < k|y_1 - y_0| < ku_1$$

Donc en intégrant :

$$|u_2| < ku_1|x - x_0| < u_1 \times k\delta < M\delta \cdot k\delta$$

On aurait de même :

$$\left|\frac{du_3}{dx}\right| = |f(x, y_2) - f(x, y_1)| < ku_2$$

et en intégrant :

$$|u_3| < ku_2|x - x_0| < u_2 \times k\delta < M\delta(k\delta)^2$$

et ainsi de suite, en général :

$$|u_n| < M\delta(k\delta)^{n-1}$$

Or on a identiquement: $y_n = y_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

y_n aura donc une limite si la série: $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ est convergente. Or elle sera sûrement convergente si l'on prend: $k\delta < 1$, car tous ses termes seront inférieurs en valeur absolue aux termes correspondants d'une progression géométrique décroissante. Donc y_n aura une limite si l'on a pris: $\delta < \frac{1}{k}$, et cette limite sera une fonction y de x, définie dans l'intervalle: $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

δ étant soumis aux 3 inégalités: $\leq a$, $\leq \frac{b}{M}$, $< \frac{1}{k}$.

On voit que cet intervalle peut être plus restreint que celui que nous avions obtenu par la méthode de Cauchy (1e démonstration) et qui n'était soumis qu'aux 2 premières inégalités:

$$A \leq a, \qquad A \leq \frac{b}{M}.$$

En revanche cette seconde démonstration a l'avantage de définir la fonction y par une série convergente; on voit que cet avantage a été acheté par une restriction de l'intervalle où cette fonction pouvait être définie.

La fonction y que nous venons de définir est évidemment uniformément continue dans tout intervalle contenu lui-même dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Donc on a, pour n suffisamment grand: $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad |y_{n-1} - y| < \frac{\varepsilon}{2}$

d'où: $|y_n - y_{n-1}| < \varepsilon$. Or: $y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx$

$|f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})| < k|y_n - y_{n-1}| < k\varepsilon$. Donc:

$\left|(y_n - y_0) - \int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\, dx\right| < k\varepsilon |x - x_0| < k\delta\varepsilon$. A la limite: ε infiniment petit pour $n = \infty$.

$$y - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx \qquad \text{d'où :} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Ainsi la fonction y vérifie bien l'équation différentielle, c. q. f. d.

— Nous allons maintenant démontrer le théorème pour le cas de 2 variables complexes. Il semble que ce soit un cas plus général que le précédent, les variables réelles pouvant être considérées comme un cas particulier des variables complexes ; en réalité, il est plus particulier car il faut plus de conditions pour qu'il y ait une intégrale dans le cas de variables imaginaires que dans le cas de valeurs réelles, chaque imaginaire équivalant à 2 variables réelles.

Employons d'abord la méthode de Cauchy : la 1e condition est que la fonction $f(x, y)$ soit holomorphe au voisinage des 2 points x_0 y_0, c. à d. dans 2 cercles de rayons respectifs a, b entourant ces 2 points, chacun dans son plan. La 2e condition sera vérifiée si l'on suppose que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ soit continue dans les 2 cercles et sur les 2 circonférences (si elle n'était pas continue sur les 2 circonférences on pourrait satisfaire à cette condition en prenant des rayons plus petits, différant de $\underline{a}$, $\underline{b}$ aussi peu qu'on voudra) En effet, la différence :

$f(x, y_2) - f(x, y_1)$ a une limite supérieure, car en vertu du théorème des accroissements finis généralisé (étendu par M Darboux aux variables imaginaires) on a l'égalité :

$$f(x_2) - f(x_1) = \lambda (x_2 - x_1) f'(x_1 + \theta (x_2 - x_1)) \qquad \begin{array}{l} |\lambda| < 1 \\ \theta < 1 \end{array}$$

Donc

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < (y_2 - y_1) f'_y(x, y_1 + \theta(y_2 - y_1)) < k(y_2 - y_1)$$

k étant par ex. le maximum du module de f'_y dans les 2 cercles, y compris leurs circonférences.

Cela posé, parcourons un rayon du cercle x_0 à partir du centre; la fonction $f(x,y)$ et sa dérivée sont continues sur ce rayon. Allons jusqu'à un point quelconque x de ce rayon, et fractionnons le segment (x_0, x) en éléments; on ~~aura~~ fera comme précédemment:

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)$$
$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)$$
$$\dots\dots\dots$$
$$y_n - y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

et l'on démontrera comme ci-devant que l'on obtient une valeur bien déterminée de y en x, pourvu que $|x|$ soit compris dans l'intervalle: $|x_0|, |x_0| + |A|$ $\quad |A| < a, \quad |A| < \frac{b}{M}$.

On définit ainsi une fonction y de x, continue sur chaque rayon issu de x_0. Reste à savoir si cette fonction y est une fonction analytique de x; c'est ce que nous démontrerons dans la suite: on ne peut l'affirmer dès maintenant avec certitude.

— Nous donnerons auparavant une autre démonstration, qui est aussi due à Cauchy: elle a l'avantage de donner sûrement pour intégrale une fonction analytique de x.

Si l'intégrale cherchée est une fonction analytique, on pourra la développer en série de Taylor:

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \dots\dots$$

Or, $\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = f(x_0, y_0) \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \quad$ etc.

On connaît $f(x,y)$ et ses dérivées partielles successives, donc on pourra calculer de proche en proche les coefficients du développe-

ment, qui sont les dérivées successives de y par rapport à x.
Si cette série est convergente, ce sera la solution de l'équation différentielle:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Car, y étant holomorphe en x, on aurait 2 fonctions holomorphes de x: y et $\int f(x, y_0)\, dx$
qui seraient égales ainsi que toutes leurs dérivées pour $x = x_0$.
Elles seraient donc identiques, ~~attendu que y prend pour $x = x_0$ la valeur y_0~~ et l'on aurait:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Cauchy a employé divers moyens pour démontrer la convergence de cette série, notamment la méthode qu'il appelle « calcul des limites » et qui est une méthode de comparaison entre 2 séries dont l'une est certainement convergente.

Le meilleur procédé, ou du moins celui qui donne le plus grand rayon de convergence pour la série, est dû à Briot et Bouquet (Cauchy l'avait indiqué.) Mais, en compensation, il donne une limite de convergence inférieure à celle qu'on obtient par la 1e méthode de Cauchy, méthode la plus directe et la plus logique, qui consiste à considérer l'équation différentielle comme la limite d'une équation aux différences finies.

Faisons, pour simplifier l'écriture: $x_0 = 0$ $y_0 = 0$.
y sera alors exprimée en série de Maclaurin:

$$y = y'x + \frac{y''}{1.2}x^2 + \frac{y'''}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots$$

On peut trouver une fonction $\varphi(x, y)$ dont toutes les dérivées partielles (pour $x = 0$, $y = 0$) aient un module supérieur aux dérivées correspondantes de $f(x, y)$:

$$\varphi(x, y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)}$$

M étant le module maximum de $f(x,y)$ dans les 2 cercles où elle est holomorphe. On doit avoir : $\left|\dfrac{\partial^{n+n'}\varphi}{\partial x^n \partial y^{n'}}\right| > \left|\dfrac{\partial^{n+n'} f}{\partial x^n \partial y^{n'}}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$

Considérons l'équation :

$$\frac{dY}{dx} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{Y}{b}\right)}$$

Elle définit une fonction Y de x, qui s'annule pour $x=0$. Si elle est holomorphe dans le voisinage de x, on pourra représenter cette fonction par une série de Maclaurin :

$$Y = Y'x + \frac{Y''}{1.2}x^2 + \frac{Y'''}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots$$

où $Y'\ Y''\ Y'''\ldots$ sont positives, car le 2e membre doit être essentiellement positif. Ainsi Y sera une série à coefficients réels et positifs, donc croissante quand x croît en valeur absolue. Pour prouver la convergence de la série qui représente y, comparons-la à la série Y : chaque coefficient de la 1re est inférieur en valeur absolue au coefficient correspondant de la dernière : en effet $|y'_0| < Y'_0 = M$ (puisque $|f(x,y)| \leq M$)

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \qquad Y'' = \frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial Y}\frac{dY}{dx}$$

En comparant ces 2 expressions, on voit que chaque terme de la 1re est moindre en valeur absolue que le terme correspondant de la 2e ; donc : $|y''| < |Y''|$ de même $|y'''| < |Y'''|$ et ainsi de suite.

Donc, si la série Y est convergente dans un certain cercle, la série y sera à fortiori convergente dans un cercle de rayon au moins égal. — Pour démontrer la convergence de la série Y, il



suffit d'exprimer explicitement la fonction Y et de montrer qu'elle est holomorphe. Or l'équation différentielle en Y peut s'écrire :

$$\frac{dY}{dx} - \frac{Y}{b}\frac{dY}{dx} = \frac{M}{1-\frac{x}{a}}$$

Intégrons :

$$Y - \frac{1}{2b}Y^2 = -aM\log\left(1-\frac{x}{a}\right)$$

Le logarithme ayant une infinité de déterminations, prenons celle qui s'annule pour $x=0$; $\log 1 = 0$.

La constante d'intégration est nulle puisque Y doit être nulle pour $x=0$. On aura Y en résolvant cette équation du 2e degré :

$$Y^2 - 2bY - 2abM\log\left(1-\frac{x}{a}\right) = 0$$

$$Y = b \pm \sqrt{b^2 + 2abM\log\left(1-\frac{x}{a}\right)}$$

La quantité soumise au radical est une fonction déterminée pour $x=0$; il faut prendre pour le radical le signe $-$ pour que $Y=0$ quand $x=0$. On a ainsi une fonction Y holomorphe dans le voisinage de $x=0$ jusqu'à ce que le radical s'annule :

$$b + 2aM\log\left(1-\frac{x}{a}\right) = 0$$

d'où :

$$\log\left(1-\frac{x}{a}\right) = -\frac{b}{2aM} \qquad 1-\frac{x}{a} = e^{-\frac{b}{2aM}} \qquad x = a\left(1-e^{-\frac{b}{2aM}}\right)$$

Ainsi Y est holomorphe, et la série qui la représente est convergente à l'intérieur d'un cercle de rayon : $\rho = a\left(1-e^{-\frac{b}{2aM}}\right)$

Donc le développement de y sera convergent dans ce cercle ; on voit qu'il est plus petit que le cercle de rayon a. Il faut s'assurer que, quand x reste dans ce cercle, y reste dans le cercle de rayon b, afin que $f(x, y)$ reste dans le champ où elle est définie.

Or, si l'on donne à x sa plus grande valeur absolue

$a(1-e^{-\frac{b}{2aM}})$ Y aura son module maximum qui c'est précisément b, puisque la valeur attribuée à x annule le radical. Donc, pour $|x| < a(1-e^{-\frac{b}{2aM}})$ on a :

$|Y| \leq b$ et a fortiori : $|y| < b$

ce qu'il fallait vérifier. On en conclut que $\frac{dy}{dx}$ est une fonction identique à $f(x,y)$ et définie dans le même champ, c.à.d. que y est bien la solution de l'équation différentielle.

On peut affirmer de plus que cette intégrale est unique, pourvu qu'on aille de x_0 à X par un chemin fini. On le démontre comme pour le cas des variables réelles –

Soit en effet $(y+u)$ une seconde intégrale de l'équation différentielle, ayant la même valeur à l'origine, c.à.d. u s'annulant pour $x=0$: on a à la fois :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dx} = f(x, y+u)$$

d'où : $$\frac{du}{dx} = f(x, y+u) - f(x,y) = u\,\Phi(x)$$

$\Phi(x)$ étant une fonction continue de x le long de l'arc de courbe fini qui joint 0 à X. Il s'agit de montrer que l'intégrale de l'équation $\frac{du}{dx} = u\,\Phi(x)$, qui est nulle pour $x=0$, est identiquement nulle. Or on a, en intégrant :

$$\log\frac{u}{u_0} = \int_{x_0}^{x} \Phi(x)\,dx$$

On prendra l'intégrale jusqu'à un point où u s'annule ; il n'y en

a pas avant O : on prendra donc l'intégrale de x_0 à O, elle sera finie, et le logarithme deviendra infini, ce qui implique contradiction. L'hypothèse est donc absurde, et le théorème est démontré, pourvu que la ligne (O, x_0) ait une longueur finie.

Nous allons donner à cette démonstration une autre forme, qui a l'avantage de s'étendre au cas de plusieurs équations différentielles et de plusieurs fonctions inconnues.

Pour prouver que l'intégrale de l'équation : $\frac{du}{dx} = u\,\Phi(x)$ est identiquement nulle, posons : $V = Au$

A étant une fonction arbitraire. $\frac{dV}{dx} = \frac{dA}{dx}u + A\frac{du}{dx}$

$$\frac{dV}{dx} = u\left[\frac{dA}{dx} + A\,\Phi(x)\right]$$

On peut choisir la fonction A de manière qu'elle annule identiquement l'expression : $\frac{dA}{dx} + A\,\Phi(x)$

et que pour $x = 0$, elle se réduise à une valeur arbitraire A_0. (c'est la solution d'une équation différentielle du 1er ordre, et elle s'obtient par une simple quadrature.) On aura alors constamment :

$$\frac{dV}{dx} = 0 \qquad \text{d'où :} \qquad V = C^{te}$$

Or à l'origine, $V = 0$, puisque $u = 0$; donc V est nulle identiquement, et par suite u l'est aussi, c. q. f. d.

— Nous pouvons maintenant comparer entre elles les 2 méthodes, dues toutes deux à Cauchy, mais dont la seconde a été adoptée par Briot et Bouquet (page 98, page 100.)

La première donne pour l'intégrale une succession de valeurs

sur chaque rayon du cercle de rayon ρ, satisfaisant aux inégalités :

$$\rho \leq a, \qquad \rho \leq \frac{b}{M}$$

Pour chaque point x de ce cercle on a une valeur déterminée pour l'intégrale : il n'en résulte pas nécessairement que l'intégrale est une fonction holomorphe dans tout le cercle. Il est pas inutile de le démontrer, car le rayon de ce cercle est plus grand que le rayon de convergence qu'on trouve par la seconde méthode :

$$a\left(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}\right)$$

Si $\rho = a$, cela est évident. Si $\rho = \frac{b}{M}$, on peut prouver que :

$$a\left(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}\right) < \frac{b}{M}$$

Posons : $\frac{b}{2aM} = x$ $\qquad x$ est essentiellement positif.

L'inégalité devient : $\quad 1 - e^{-x} < 2x$

ou : $\quad 2x + e^{-x} - 1 > 0$

Or, pour $x = 0$; $\quad 2x + e^{-x} - 1 = 0$

Prenons la dérivée ; $\quad 2 - e^{-x}$ $\qquad$ Elle est positive quand x croît à partir de 0 ; donc : $\quad 2x + e^{-x} - 1 > 0$

Ainsi la limite de convergence fournie par la seconde méthode est toujours inférieure à $\rho \leq a$, $\rho \leq \frac{b}{M}$.

Il est donc intéressant de démontrer que l'intégrale est holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon ρ.

Soient ε, η 2 quantités positives fixes aussi petites qu'on veut. On considérera les 2 cercles de rayons respectifs $(a - \varepsilon)$, $(b - \eta)$

dans les plans respectifs de x et de y ; soient x_1, y_1 2 points pris à l'intérieur de ces 2 cercles ; $f(x, y_1)$ est holomorphe au voisinage de x_1, y_1 à l'intérieur de cercles tracés autour de ces 2 points et ayant pour rayons respectifs ε et η. Si autour du point x_1 on décrit un cercle de rayon : $r = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{\eta}{2\varepsilon M}}\right)$
on aura, en vertu de la 2e démonstration, une intégrale qui se réduira à y_1 pour $x = x_1$, et qui sera holomorphe à l'intérieur de ce cercle r. Elle coïncide d'ailleurs avec l'intégrale obtenue par la 1e méthode et définie dans tout le cercle ε, puisque leurs valeurs en x_1 sont les mêmes, et qu'il n'y a qu'une intégrale, prenant sur chaque rayon du cercle ε une suite de valeurs déterminées.

Cela posé, prenons d'abord pour centres des cercles ε, η, les points x_0 y_0, centres des cercles $(a-\varepsilon)$, $(b-\eta)$. On aura une intégrale holomorphe dans le cercle de rayon r et de centre x_0, et se réduisant à y_0 pour $x = x_0$. Dans ce cercle prenons un point x_1 très près du bord ; à x_1 correspondra y_1 à l'intérieur du cercle de rayon η et de centre y_0, donc a fortiori, intérieur au cercle de rayon $(b-\eta)$. Décrivons autour de x_1 un nouveau cercle de rayon r ; on aura une nouvelle intégrale définie dans ce cercle, et on pourra, par la 1e méthode, la définir le long du rayon $x_0 x_1$ jusqu'au bord du nouveau cercle. Les valeurs correspondantes de y seront toujours dans le cercle de centre y_0 et de rayon $(b-\eta)$. On peut faire tourner le point x_1 autour de x_0 ; le petit cercle mobile engendrera un cercle de centre x_0, de rayon presque égal à $2r$, à l'intérieur duquel l'intégrale sera holomorphe. On prendra de nouveau

un point x_2 très voisin du bord de ce cercle, et on l'entourera d'un cercle de rayon r, qu'on fera ensuite tourner ; on définira ainsi l'intégrale dans un cercle de rayon jusqu'égal à $3r$ autour de x_0, et ainsi de suite, on étendra progressivement l'aire où l'intégrale est holomorphe jusqu'au cercle de rayon $(a-\varepsilon)$. On sera arrêté là, parce que si on le dépassait, les cercles r contiendraient des points $\underline{x}$ auxquels correspondraient des points $\underline{y}$ extérieurs au cercle $(b-\eta)$, et l'intégrale ne serait plus holomorphe.

Il y a donc une intégrale et une seule de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

qui prend, pour $x = x_0$, la valeur y_0, si $f(x,y)$ est continue dans le cas de variables réelles, si $f(x,y)$ est holomorphe dans le cas de variables imaginaires, et si de plus, dans ce dernier cas, le chemin suivi de x_0 à X est fini. S'il n'était pas fini, en effet, il pourrait y avoir plusieurs intégrales, et même une infinité.

— On a sévèrement reproché à Briot et Bouquet d'avoir omis cette dernière condition, qui leur paraissait évidente, et que d'ailleurs leur démonstration implique. On a prétendu infirmer cette démonstration en proposant un exemple où l'intégrale peut prendre une infinité de valeurs pour $x = x_0$. Considérons en effet l'équation différentielle : $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$

Supposons : $y_0 = 0$ $x_0 \gtrless 0$.

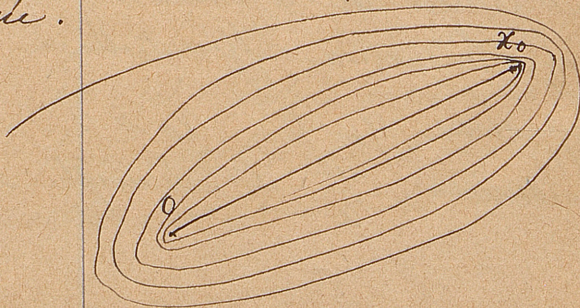
La fonction $\frac{y^2}{x}$ est holomorphe au voisinage de x_0 ; on a donc

l'intégrale : $-\frac{1}{y} = \log x + C$ $\quad y = -\frac{1}{\log x + C}$

Partons d'un point arbitraire x et décrivons un chemin qui tourne dans le même sens autour des 2 points O et x_0, indéfiniment, en s'enveloppant lui-même. On dit que ce chemin tend vers x_0, parce qu'à chaque tour il se rapproche de ce point et doit passer, après un nombre suffisant de tours, aussi près qu'on voudra de x_0. Or $\log x$ augmente à chaque tour de $2\pi i$, donc y tend vers 0 quand le chemin s'allonge indéfiniment ; à chaque tour, on peut s'arrêter ~~et venir~~ en un point voisin de x_0 ; on aura une valeur différente pour y ; on peut donc dire qu'il y a une infinité d'intégrales qui pour $x = x_0$, prennent la valeur y_0, c.à.d. qui tendent vers 0 quand le chemin issu de x tend vers le point x_0.

Mais cet exemple est spécieux ; on ne peut pas dire que le chemin tende vers le point x_0, car s'il est vrai qu'il se rapproche indéfiniment de ce point, il s'en éloigne toutefois à chaque tour d'une quantité finie voisine de la distance (O, x_0). Tout au plus peut-on dire qu'il tend vers la droite Ox_0 tout entière, ce qui explique l'indétermination de l'intégrale. En tout cas, l'argument ne porte pas contre la démonstration de Briot & Bouquet, car elle implique la condition du chemin fini qu'on prétend que ces auteurs ont négligée.

Harnack



Considérons maintenant n équations différentielles ordinaires du 1er ordre à n fonctions inconnues :

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2 \ldots\ldots y_n)$$
$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2 \ldots\ldots y_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2 \ldots\ldots y_n)$$

On suppose d'abord que $f_1, f_2 \ldots f_n$ sont continues au voisinage des valeurs $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ assignées aux fonctions inconnues pour $x = x_0$. On suppose de plus, comme dans le cas d'une seule fonction inconnue, n conditions de la forme suivante :

$$|f(x, y_1' y_2' \ldots y_n') - f(x, y_1 y_2 \ldots y_n)| < k_1(y_1' - y_1) + k_2(y_2' - y_2) + \ldots + k_n(y_n' - y_n)$$

$k_1\, k_2 \ldots k_n$ étant des constantes qui ne sont pas nécessairement les mêmes pour les n fonctions f.

Ces hypothèses faites, on démontrera, exactement comme dans le cas d'une seule fonction inconnue y, l'existence d'un système de n intégrales vérifiant les équations précédentes dans l'intervalle $2a$ pour x, et dans les intervalles $2b_1, 2b_2, \ldots 2b_n$ pour $y_1\, y_2 \ldots y_n$, et prenant, pour $x = x_0$, les valeurs $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$. On devra prendre pour intervalle définitif de x la plus petite des quantités : $a, \frac{b_1}{M}, \frac{b_2}{M}, \ldots\ldots \frac{b_n}{M}$.

M étant le module maximum des n fonctions f dans les intervalles $b_1, b_2 \ldots b_n$.

On peut aussi employer la 2e méthode (page 95) Considérons seulement 2 équations différentielles :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z)$$

avec les conditions :

$$|f(x'y'z') - f(x, y, z)| < A \qquad |\varphi(x'y'z') - \varphi(x, y, z)| < B.$$

On part des valeurs y_0 z_0, et on résout les équations :

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x, y_0, z_0) \qquad \frac{dz_1}{dx} = \varphi(x, y_0, z_0)$$

on en tire les fonctions y_1, z_1 qui doivent prendre les valeurs y_0, z_0 pour $x = x_0$; puis on les substitue dans les équations :

$$\frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, z_1) \qquad \frac{dz_2}{dx} = \varphi(x, y_1, z_1)$$

qui déterminent de nouvelles fonctions y_2, z_2 qui doivent se réduire à y_1 z_1 pour $x = x_1$; et ainsi de suite indéfiniment.

On trouve ainsi une succession de fonctions :

$$y_1\, z_1,\ y_2\, z_2, \ldots\ldots\ y_m\, z_m, \ldots$$

On démontre qu'elles tendent respectivement vers des limites y, z, quand <u>m</u> augmente indéfiniment, et que les fonctions y, z sont définies par des séries convergentes dans le cercle de centre x_0 dont le rayon est la plus petite des 3 quantités : a, $\frac{b}{M}$, $\frac{1}{A+B}$.

— On peut enfin employer la 3e méthode, celle de la comparaison des séries (page 100) — Le rayon de convergence est encore plus restreint ; il est : $a\left(1 - e^{-\frac{b}{(n+1)aM}}\right)$ (on suppose b et M les mêmes pour tous les f) inférieur à la fois à <u>a</u> et à $\frac{b}{M}$.

On voit que le nombre n des équations s'introduit ici sans nécessité intrinsèque. Cette méthode est donc la moins avantageuse pour l'étendue du champ où les intégrales sont définies.

On démontre encore ici que le système de solutions y, z auquel on arrive par l'une ou l'autre de ces méthodes est unique. Supposons que les équations admettent d'autres solutions: $y+u, \quad z+v$ se réduisant aussi à $y_0 z_0$ pour $x=x_0$.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{du}{dx}=f(x, y+u, z+v) \qquad \frac{dz}{dx}+\frac{dv}{dx}=\varphi(x, y+u, z+v)$$

$$\frac{du}{dx}=f(x, y+u, z+v)-f(x, y, z)=u f_1(x)+v f_2(x)$$

$$\frac{dv}{dx}=\varphi(x, y+u, z+v)-\varphi(x, y, z)=u\varphi_1(x)+v\varphi_2(x)$$

On va démontrer que les fonctions u, v, intégrales de ce nouveau système d'équations, qui s'annulent pour $x=x_0$, sont constantes, c.à.d. identiquement nulles. Posons (cf. page 104):

$$V=\alpha u+\beta v \qquad \alpha \text{ et } \beta, \text{ fonctions arbitraires.}$$

$$\frac{dV}{dx}=u\frac{d\alpha}{dx}+v\frac{d\beta}{dx}+\alpha\frac{du}{dx}+\beta\frac{dv}{dx}$$

$$=u\left[\frac{d\alpha}{dx}+\alpha f_1(x)+\beta\varphi_1(x)\right]+v\left[\frac{d\beta}{dx}+\alpha f_2(x)+\beta\varphi_2(x)\right]$$

Disposons de α, β de manière à rendre $\frac{dV}{dx}$ identiquement nulle:

$$\frac{d\alpha}{dx}+\alpha f_1(x)+\beta\varphi_1(x)=0 \qquad \frac{d\beta}{dx}+\alpha f_2(x)+\beta\varphi_2(x)=0$$

On peut trouver des fonctions α, β de x vérifiant ces 2 équations différentielles et prenant pour $x=x_0$ les valeurs arbitraires $\alpha_0 \ \beta_0$.

On a alors : $\frac{dV}{dx} = 0$, $V = C^{te}$.

Or u, v sont nulles pour $x = x_0$; donc V est constamment nulle et l'on a identiquement : $\alpha u + \beta v = 0$

On peut trouver d'autres fonctions α', β' vérifiant les mêmes équations, et prenant pour $x = x_0$ les valeurs arbitraires α'_0, β'_0.

On aurait encore identiquement : $\alpha' u + \beta' v = 0$

Or on peut toujours faire que : $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \gtrless 0$

Pour que les 2 identités précédentes aient lieu, il faut que u, v soient constamment nulles, c. q. f. d.

On a vu que l'équation différentielle : $\frac{du}{dz} = f(u, z)$ si $f(u, z)$ est holomorphe, est vérifiée par une fonction u de z se réduisant à u_0 en z_0 et définie dans un cercle autour de z_0.

Considérons le cas particulier où l'équation a la forme :

$$\frac{du}{dz} = Au^2 + Bu + C$$

A, B, C étant des fonctions analytiques de z ayant pour points singuliers les points $a, b, c \ldots$ dans le plan des z. Si l'on part d'un point z_0 différent de $a, b, c \ldots$ avec une valeur u_0, on peut suivre la fonction par continuité sur un chemin quelconque ne passant pas par $a, b, c \ldots$ – Entourons donc $a, b, c \ldots$ de petits cercles $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ de rayons finis aussi petits qu'on veut, où le point z ne devra pas entrer. D'autre part, u ne devant pas devenir infini, excluons le point à l'infini en traçant dans le plan des u, de l'origine comme centre, un cercle Γ d'un rayon

aussi grand qu'on voudra : on peut toujours faire en sorte que u_0 se trouve à l'intérieur de ce cercle. Tant que u ne sortira pas de I, $\frac{du}{ds}$ sera finie et déterminée, et la fonction aura un rayon de convergence fini — en donnant d'autre part à z une valeur extérieure aux cercles α, β, γ.... c.à.d. différant de a, b, c..... d'une quantité finie, les fonctions A, B, C seront parfaitement déterminées ; on aura donc pour tout point u situé dans I un développement convergent dans un certain cercle autour de ce point, et le rayon de convergence aura un minimum non nul : soit ρ. Donc, tant que u reste dans I, on a une ~~développement~~ fonction holomorphe au voisinage de ce point dans un cercle de rayon au moins égal à ρ.

— Supposons maintenant que u sorte du cercle I ; considérons l'équation transformée qu'on obtient par le changement de variable :

$$u = \frac{1}{v} \qquad -\frac{dv}{dz} = A + Bv + Cv^2$$

C'est une équation de même forme que la première ; la région extérieure à I dans le plan des u est transformée en un petit cercle entourant l'origine, γ, dans le plan des v. Quand v est dans γ, on a un certain développement dont le rayon de convergence a un minimum non nul, ρ' ; soit r la plus petite des 2 quantités ρ, ρ', on pourra toujours prolonger la fonction dans un rayon r.

Remarquons que la fonction u ne sera pas nécessairement holomorphe sous la forme $\frac{1}{v}$; mais elle n'aura que des pôles, qui seront les racines de v — On peut donc en partant de z_0, prolonger la fonction de proche en proche avec le rayon r, et atteindre un point

quelconque z situé en dehors des petits cercles $\alpha, \beta, \gamma \dots$

D'ailleurs il n'y a pas d'autres points singuliers pour z que les points $a, b, c \dots$ qui sont les pôles ou points singuliers essentiels de A, B, C. La valeur obtenue pour u en allant de z_0 à z par divers chemins est toujours la même; car 2 chemins voisins pourront être enfermés dans une même série linéaire de cercles de rayon r, et entre 2 chemins quelconques on pourra toujours intercaler un nombre suffisant, mais fini, de chemins voisins distants de moins de $2r$. Donc, dans toute région du plan limitée par un contour simple et n'enfermant aucun des points $a, b, c \dots$ l'intégrale u est une fonction analytique uniforme qui n'a que des pôles.

Examinons maintenant le cas particulier de l'intégrale elliptique:

$$z = \int \frac{du}{\sqrt{A(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}}$$

qui provient d'une équation différentielle de la forme:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = A(u-a)(u-b)(u-c)(u-d) \qquad A \text{ constante.}$$

La fonction u sera parfaitement définie si en partant de z_0 on se donne une détermination du radical. On va montrer qu'on peut étendre cette fonction de proche en proche dans tout le plan au moyen d'un cercle de rayon fini, comme ci-dessus.

Considérons le plan des u: u admet pour points critiques: a, b, c, d et ∞. Isolons les 4 pôles a, b, c, d par de petits cercles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, et le point à l'infini par un grand cercle Γ ayant l'origine pour centre. Partons de z_0 avec la valeur initiale u_0 différente de a, b, c, d, c.à.d. extérieure aux cercles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

On peut toujours supposer que u_0 se trouve dans le grand cercle Γ, et par conséquent dans la région limitée par les 5 contours $\Gamma, \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$. Tant que u ne sort pas de cette région, on a un développement bien déterminé en chaque point, avec un rayon de convergence fini ; ce rayon a un certain minimum non nul ρ – Mais u peut sortir de la région indiquée, soit en entrant dans un des cercles $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, soit en sortant du cercle Γ.

Si u pénètre dans α, par exemple, nous transformerons l'équation par le changement de variable : $u = a + v^2$

La nouvelle ~~variable~~ fonction v sera dans son plan à l'intérieur d'un cercle α' ayant pour centre l'origine, et un rayon très-petit. L'équation devient :
$$\frac{du}{dz} = 2v\frac{dv}{dz} = \sqrt{Av^2(a-b+v^2)(a-c+v^2)(a-d+v^2)}$$
ou :
$$2\frac{dv}{dz} = \sqrt{A(a-b+v^2)(a-c+v^2)(a-d+v^2)}$$
Tout revient à étudier la fonction v dans le cercle α'. Or le radical ne s'annule pas quand v reste dans ce cercle car a, b, c, d sont supposés distincts ; donc $\frac{dv}{dz}$ est holomorphe à l'intérieur de ce cercle : le développement de v admet donc un rayon minimum de convergence non nul, ρ_1. Ainsi quand u s'approche indéfiniment du pôle a, on pourra développer $(u-a)$ dans un cercle de rayon ρ_1 – De même, on aurait des développements convergents au voisinage de b, c, d, dans des cercles de rayons $\rho_2\,\rho_3\,\rho_4$. Ainsi, tant que u reste dans Γ, on peut développer l'intégrale en série de Taylor dans un cercle de rayon au moins égal au plus petit des rayons : $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$.

Si u sort du cercle I, on posera : $u = \frac{1}{v}$
et ce changement de variable transforme l'extérieur du cercle I en un cercle ayant pour centre l'origine et un rayon très petit dans le plan des v. L'équation différentielle devient :

$$-\frac{dv}{dz} = \sqrt{A(1-av)(1-bv)(1-cv)(1-dv)}$$

Chaque détermination du radical est une fonction holomorphe de v dans ce petit cercle. Le développement aura donc dans ce cercle un rayon minimum de convergence, soit ρ'. En résumé, on peut faire l'extension analytique ~~par un~~ soit de u, soit de $\frac{1}{u}$, développés en série de Taylor, au moyen d'un cercle de rayon fixe r, r étant la plus petite des 6 quantités : $\rho\ \rho_1\ \rho_2\ \rho_3\ \rho_4\ \rho'$.
Ici encore, les racines de v sont des pôles pour la fonction u ; mais celle-ci n'admet que des pôles.

— Revenons à l'équation générale du 1er ordre :

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x) \qquad (1)$$

On en tire la fonction y holomorphe en x au voisinage de x_0, c.à.d. développée suivant les puissances croissantes de $(x - x_0)$ et se réduisant à y_0 en x_0 : $y = \varphi(x, y_0)$
Inversement, cette relation définit $y_0 = F(x, y)$
fonction holomorphe de y au voisinage du point (x, y) considéré comme point initial, y_0 étant la valeur qui correspond au point variable x_0. — L'intégrale générale de l'équation différentielle est donc :
$$F(x, y) = C$$
et elle est complètement définie quand on assigne à la constante

arbitraire C la valeur y_0. Or, quelle que soit la constante C, la fonction F(x,y) satisfait l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

On a donc identiquement : $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} f(y,x) = 0 \qquad (2)$$

quels que soient x, y

Il y a une infinité de fonctions satisfaisant à cette équation, mais elles ont entre elles des relations. Soient 2 fonctions F, F_1 qui satisfont à cette équation ; on a :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{d'où :} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

ce qui prouve que F et F_1 sont fonctions l'une de l'autre. Donc, si l'on a pu trouver une solution F de cette équation, toute fonction de F en sera une solution, et toute solution de cette équation sera une fonction de F. Pour avoir l'intégrale générale de l'équation différentielle ordinaire (1) il suffira d'égaler à une constante la fonction F vérifiant l'équation (2). Ainsi l'intégration de l'équation différentielle ordinaire (1) est équivalente à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (2). On peut donc ramener la résolution de l'équation (1) à celle de l'équation :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(y,x)\frac{\partial F}{\partial y}$$

Comme cette équation a une infinité de solutions, qui se déduisent toutes d'une seule, il faut pour déterminer la solution F, lui imposer certaines conditions initiales.

Supposons f(x,y) holomorphe dans le voisinage de x_0, y_0, et cherchons s'il y a une fonction F(x,y) vérifiant l'équation

précédente et se réduisant pour $x = x_0$ à une fonction donnée de y, $\varphi(y)$, holomorphe dans le voisinage de y_0 :

$$F(x_0, y) = \varphi(y)$$

C'est, dans le cas le plus simple, le problème général de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Or la fonction F doit pouvoir se développer en une série de Taylor convergente au voisinage de x_0 :

$$F(x,y) = F(x_0\, y) + (x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \ldots\ldots$$

les dérivées partielles successives sont prises pour $x = x_0$, y restant arbitraire. On peut calculer les coefficients de ce développement ; on a d'abord :

$$F(x_0\, y) = \varphi(y)$$

puis :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y)\frac{\partial F}{\partial y} \qquad \text{pour } x = x_0.$$

$\frac{\partial F}{\partial y}$ est fonction de x, y ; mais on peut faire d'abord $x = x_0$, puis dériver par rapport à y ;

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f(x,y)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} \qquad \text{pour } x = x_0.$$

Or $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = \varphi'(y)$; d'autre part $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(f(x_0 y)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0\right)$

tous ces termes étant connus, on aura $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0$, et ainsi de suite.

On connaîtra donc le développement de F autour de x_0.

Reste à savoir si ce développement est convergent dans le voisinage de x_0. Pour cela, on emploiera la méthode des limites de Cauchy, c.à.d. que l'on comparera ce développement avec une série certainement convergente.

Nous traiterons d'abord le ~~cas~~ problème suivant : soient $u_1 u_2 \ldots\ldots u_m$ $\underline{m}$ fonctions de x, y, et entre elles $\underline{m}$ équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \sum A_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x} = \sum B_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial u_m}{\partial x} = \sum L_i \frac{\partial u_i}{\partial y}$$

où les Σ comprennent $\underline{m}$ termes : $i = 1, 2, 3 \ldots\ldots m$.

On veut trouver des fonctions $u_1 u_2 \ldots u_m$ vérifiant ces équations, et se réduisant pour $x = x_0$ à des fonctions données de y, c.à.d.

$$u_i(x_0 y) = \varphi_i(y)$$

On pourra développer, comme dans le cas précédent, les $\underline{m}$ fonctions u en série, et on calculera $\frac{\partial u_i}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \ldots\ldots$ pour $x = x_0$. Reste à savoir si ces développements sont convergents au voisinage du point x_0, y_0. Supposons pour simplifier : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ et que φ_i s'annule pour $y = y_0$, c.à.d.

$$\varphi_i(0) = 0.$$

Les coefficients $A, B, \ldots\ldots L$ sont supposés fonctions de $u_1 u_2 \ldots u_m$; holomorphes dans des cercles de rayon commun $\underline{r}$ autour des p. $u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots\ldots u_m = 0$, dans les plans respectifs. De plus, les fonctions φ sont supposées holomorphes dans le plan des y à l'intérieur d'un cercle de centre O et de rayon ρ.

Or, étant données $\underline{m}$ fonctions $u_1 u_2 \ldots u_m$ holomorphes on peut trouver une fonction dite de comparaison, c.à.d. une fonction de $u_1 u_2 \ldots\ldots u_m$ ayant toutes ses dérivées partielles positives pour $u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots\ldots u_m = 0$, et supérieures

en valeur absolue aux dérivées correspondantes de toutes les fonctions $A, B, \ldots\ldots I$.

On a employé plus haut (page 100) dans la méthode de Briot & Bouquet, une fonction de comparaison dans le cas de 2 variables x, y :

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)} \qquad M \text{ mod. max. de } f(x,y) \quad |x|<a \;,\; |y|<b.$$

M. Weierstrass a proposé un autre type de fonction de comparaison qui est :

$$\frac{M}{1-\frac{x+y}{r}} \qquad \text{fonction définie et holomorphe pourvu que } |x|<\frac{r}{2},\ |y|<\frac{r}{2}.$$

Elle satisfait aux mêmes conditions : toutes ses dérivées partielles sont positives pour $x=0$, et ont un module supérieur aux dérivées correspondantes de $f(x,y)$; mais dans le cas de l'équation différentielle ordinaire, elle donnerait une limite de convergence encore plus étroite que la fonction de Briot & Bouquet, qui déjà resserre cette limite. — Dans le cas des équations aux dérivées partielles, la fonction de M. Weierstrass a le avantage de donner des expressions facilement intégrables, ce qui permet de calculer les termes du développement et de leur comparer ceux de la série à examiner. Dans le cas général de m fonctions, elle devient :

$$\frac{M}{1-\frac{u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_m}{r}} = K(u_1 u_2 u_3 \ldots\ldots u_m)$$

M étant le module maximum de toutes les fonctions $A, B, \ldots\ldots I$.

La fonction K satisfait aux conditions d'une fonction de comparaison, énoncées plus haut. On considérera le système des équations aux dérivées partielles transformé en remplaçant $A, B, \ldots\ldots I$ par K.

D'autre part, les fonctions $u_1 u_2 \ldots u_m$ sont définis par les équations de condition: $u_i(x_0 y) = \varphi_i(y)$

les fonctions φ étant holomorphes dans le cercle de rayon ρ autour de $y_0 = 0$. Soit N leur module maximum; on prendra pour fonction de comparaison (type Briot et Bouquet): $\frac{N}{1 - \frac{y}{\rho}}$, ou plutôt, pour qu'elles s'annule comme les φ pour $y = 0$: $\frac{N}{1 - \frac{y}{\rho}} - N = k(y)$

Soient $V_1 V_2 \ldots V_m$ les nouvelles fonctions se réduisant toutes à $k(y)$ pour $x = x_0 = 0$, et définis par le nouveau système d'équations, où $A, B \ldots L$ sont remplacés par K. $V_1 V_2 \ldots V_m$ pourront se développer suivant les puissances de $(x - x_0)$, mais les coefficients de tous ces développements seront supérieurs aux coefficients des termes correspondants de $u_1 u_2 \ldots u_m$; donc, pour prouver que les développements de $u_1 u_2 \ldots u_m$ sont convergents, il suffira de démontrer que ceux de $V_1 V_2 \ldots V_m$ sont convergents.

Considérons donc le nouveau système d'équations:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = \Sigma K \frac{\partial V_i}{\partial y} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots m$$

où K est la fonction de comparaison définie plus haut, holomorphe quand $u_1, u_2, \ldots u_m$ restent dans un cercle de rayon $\frac{r}{m}$. Pour $x = 0$, chaque fonction V doit se réduire à la fonction de comparaison: $\frac{N}{1 - \frac{y}{\rho}} - N = \frac{Ny}{\rho - y}$ supérieure à $\varphi_i(y)$.

K devient, en substituant les V aux u: $\frac{M}{1 - \frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_m}{r}}$

Dès lors, on n'a plus qu'une seule équation, et une seule fonction V; toutes les équations du nouveau système se réduisent à :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Mm}{1 - \frac{mV}{r}} \frac{\partial V}{\partial y}$$

et la fonction V doit vérifier la condition : $V(0, y) = \frac{Ny}{\rho - y}$

On a donc à résoudre, pour trouver V, l'équation aux dérivées partielles :

$$\left(1 - \frac{mV}{r}\right) \frac{\partial V}{\partial x} - Mm \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

On peut trouver une équation finie donnant toutes les solutions de cette équation différentielle ; en effet, la fonction V doit avoir une relation avec : $\left(1 - \frac{mV}{r}\right) y + Mmx = 0$

Pour le prouver, formons le déterminant fonctionnel :

$$\frac{\partial V}{\partial x}\left(1 - \frac{mV}{r} - \frac{my}{r}\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial V}{\partial y}\left(-\frac{my}{r}\frac{\partial V}{\partial x} - Mm\right)$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x}\left(1 - \frac{mV}{r}\right) - \frac{\partial V}{\partial y} Mm = 0$$

Il y a donc une relation entre ces 2 fonctions, et on doit avoir :

$$\left(1 - \frac{mV}{r}\right) y + Mmx = F(V)$$

Or, pour $x = 0$, V doit se réduire à $\frac{Ny}{\rho - y}$; on a donc :

$$\left(1 - \frac{m}{r}\frac{Ny}{\rho - y}\right) y = F\left(\frac{Ny}{\rho - y}\right)$$

Posons : $z = \frac{Ny}{\rho - y}$.

d'où ; $y = \frac{\rho z}{N + z}$

$$F(z) = \left(1 - \frac{m}{r} z\right) \frac{\rho z}{N + z}$$

Telle est la forme de la fonction cherchée F ; on doit donc avoir l'équation : $\left(1 - \frac{mV}{r}\right) y + Mmx = \left(1 - \frac{mV}{r}\right) \frac{\rho V}{N + V}$

qui détermine la fonction $V(x, y)$ satisfaisant l'équation différentielle et prenant pour $x = 0$ la valeur $\frac{Ny}{\rho - y}$.
Cette équation du 2e degré a 2 solutions en V, qui pour $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ se réduisent à : $V_1 = 0$, $V_2 = \frac{r}{m}$.
On devra prendre la première, qui s'annule pour $x = 0$, $y = 0$; elle n'a que des racines simples, et elle est holomorphe au voisinage de $x = 0$, $y = 0$. Telle est l'intégrale unique du 2e système, dit système de comparaison ; et puisqu'elle est holomorphe, on en conclut que toutes les intégrales du 1er système ($u_1, u_2, \ldots u_m$) sont développables en séries convergentes autour de $x=0$, $y=0$, c.à.d plus généralement autour de x_0, y_0.

— Nous avons montré (pag. 117) que l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

est équivalente à l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \qquad (2)$$

c.à.d que si l'on a trouvé une solution F de celle ci, on aura l'intégrale générale de la première en posant :

$$F(x, y) = C^{te}.$$

Il restait à prouver que si l'on développe au voisinage de $x = 0$, la fonction F qui pour $x = 0$ se réduit à une fonction donnée de y, $\varphi(y)$, ce développement est convergent. Pour cela, nous nous servirons du théorème que nous venons d'établir pour le cas général de n équations simultanées aux dérivées partielles.

Mais il faut auparavant remarquer une différence : dans le théorème précédent les coefficients $A, B, \ldots L$ des dérivées partielles dépendaient des fonctions cherchées $u_1, u_2 \ldots u_m$; ici, au contraire, le coefficient f dépend des variables x, y. Pour la faire disparaître formons le système d'équations suivant :

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = -f(X,Y)\frac{\partial F}{\partial y} \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

Ce sont 3 équations aux dérivées partielles entre 3 fonctions F, X, Y, et les coefficients satisfont aux conditions du théorème précédent. On pourra donc obtenir des intégrales de ce système qui se réduisent, pour $x = 0$, respectivement à des fonctions holomorphes données de y, par exemple :

$$F(0,y) = \varphi(y) \qquad X(0,y) = 0 \qquad Y(0,y) = y$$

On fait ainsi coïncider X, Y avec x, y pour la valeur $x = 0$, de sorte que le système (3) devient équivalent à l'équation (2). Il admet visiblement la solution :

$$X = x, \qquad Y = y,$$

et c'est la seule, dans les conditions initiales données. Les fonctions qui vérifient le système (3) étant celles qui satisfont l'équation (2), on voit que $F(x,y)$ est une solution de cette dernière équation qui se réduit à $\varphi(y)$ pour $x = 0$. On sait que $F(x,y)$, comme solution du système (3) est une fonction holomorphe ; il est donc démontré que l'intégrale de l'équation (2) est développable en série de Taylor au voisinage du point $x = 0$.

Nous venons d'établir l'existence d'une fonction holomorphe $F(x,y)$ qui est l'intégrale de l'équation (2) et qui se réduit à $\varphi(y)$ pour $x = 0$. La fonction φ étant arbitraire, nous pouvons supposer :

$$\varphi(0) = 0 \qquad \varphi'(0) \gtrless 0.$$

Une fois trouvée cette fonction $F(x, y)$, il faut en déduire les intégrales de l'équation (1) qui s'annulent pour $x = 0$. Pour cela, on doit égaler F à une constante. Or on a : $F(0, 0) = 0$
donc cette constante doit être nulle, et l'on a l'équation :

$$F(x, y) = 0 \qquad (4)$$

qui définit les intégrales de l'équation (1) qui s'annulent pour $x = 0$. Or, on a démontré précédemment (pages 40 & 67) que si $\frac{\partial F}{\partial y} \gtrless 0$, cette équation définit une fonction implicite y de x, et cette démonstration ne repose pas sur la théorie des équations différentielles. Donc nous pouvons affirmer que sous la condition : $\frac{\partial F}{\partial y} \gtrless 0 \quad \varphi'(0) \gtrless 0$ qui est vérifiée, l'équation (4) a une solution y et une seule, qui s'annule pour $x = 0$, car on peut la mettre sous la forme :

$$0 = F(x, y) = [y - \psi(x)] P(x, y) \qquad \text{avec } P(0, 0) \gtrless 0.$$

d'où l'on tire : $y = \psi(x)$ fonction holomorphe qui doit vérifier l'équation (1) quand $F(x, y)$ vérifie l'équation (2).
On trouve ainsi la solution de l'équation (1) et on démontre en même temps qu'elle est unique ; il n'y a donc pas d'autre intégrale que l'intégrale holomorphe qui s'annule pour $x = 0$. On peut même remarquer que, dans la démonstration de Briot et Bouquet, nous avions été obligés d'exclure l'hypothèse d'un chemin infini ayant pour point asymptotique x_0 ; mais c'était là une considération étrangère au sujet, qui avait été seulement introduite par le mode de démonstration, de sorte que l'exception n'était qu'apparente. Ici, nous n'avons plus à tenir compte du chemin suivi, et on a sans aucune restriction l'intégrale holomorphe : $y = \psi(x)$

Le point $(x=0, y=0)$ est un point arbitraire, car on peut le ramener à coïncider avec un point quelconque par un changement d'axes.

Examinons le cas où $F(0,0)$ devient infini, mais de telle sorte que son inverse ~~soit un~~ fonction holomorphe $\varphi(x,y)$ s'annulant pour $x=0$, $y=0$: $\varphi(0,0)=0$. L'équation (2) devient :

$$\varphi(x,y)\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

Elle conserve la même forme, seulement y doit être considéré maintenant comme variable et x comme fonction. On sait qu'on peut trouver une fonction F holomorphe au voisinage de $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ et se réduisant pour $y=0$ à une fonction de x : $\psi(x)$ telle que $\psi(0)=0$. On l'égalera ensuite à une constante, et cette constante doit être nulle ; donc : $F(x,y)=0$ (4)

L'intégrale de l'équation (1) est une solution y de cette équation.

Mais tandis que ~~plus haut~~ ci-dessus on avait : $\frac{\partial F}{\partial y}\gtrless 0$ pour $\begin{matrix}x=0\\ y=0\end{matrix}$

ici on a au contraire : $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ parce que $\varphi(x,y)=0$.

On ne peut donc pas extraire de l'équation : $F(x,y)=0$ une fonction holomorphe y de x.

La fonction ψ étant arbitraire, supposons : $\psi'(0)\gtrless 0$

c.à.d. : $\frac{\partial F}{\partial x}\gtrless 0$ pour $x=0$, $y=0$

Dans ces conditions, la fonction F se met sous la forme

$$F(x,y)=\left[x-\varpi(y)\right]P(x,y) \qquad P(0,0)\gtrless 0$$

et l'équation (4) définit une fonction holomorphe : $x=\varpi(y)$ d'où l'on tirera, par inversion, les fonctions y de x qui sont

les solutions cherchées. Or $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ donc $\frac{\partial \varpi}{\partial y} = \frac{dx}{dy} = 0$, car $P'_y(0,0) \gtrless 0$. On a donc pour x un développement de la forme:

$$x = Ay^m + By^{m+1} + \dots \qquad A \gtrless 0 \qquad m \geqslant 2.$$

d'où l'on ne peut pas tirer une fonction holomorphe y de x comme quand $m = 1$. On a: $x = y^m(A + By + \dots)$

$$\sqrt[m]{x} = y\sqrt[m]{A + By + \dots}$$

La quantité soumise au radical est une fonction holomorphe de y. On a donc: $x' = \alpha y + \beta y^2 + \dots \qquad \alpha \gtrless 0.$

y est donc une fonction holomorphe de x', et par suite une fonction holomorphe de $\sqrt[m]{x}$. Il y aura m valeurs de y pour $x = 0$, correspondant aux m déterminations de $\sqrt[m]{x}$. Ainsi le point $x = 0$ est un point critique algébrique de la fonction y: c.à.d. que cette fonction y prend un nombre fini de valeurs distinctes quand le point x tourne autour de 0.

Les solutions de l'équation différentielle (1) sont donc des fonctions holomorphes de $\sqrt[m]{x}$, $(m \geqslant 2)$ — On est d'ailleurs assuré, avec ce mode de démonstration, que ce sont toutes les solutions de l'équation.

On a vu plus haut (page 114) que l'inversion de l'intégrale elliptique donne naissance à une fonction uniforme de z. Considérons une équation analogue à celle qui engendre l'intégrale elliptique, mais où le polynôme en u est du 6e degré:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = Au^6 + Bu^5 + Cu^4 + Du^3 + Eu^2 + Fu + G$$

et demandons-nous si u est une fonction uniforme de z, comme dans le cas d'un polynôme du 4e degré, c à d si l'inversion de l'intégrale :

$$z = \int \frac{du}{\sqrt{Au^6 + Bu^5 + \dots\dots}}$$

donne lieu à une fonction uniforme. — On peut écrire :

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = A(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)(u-e)(u-f)$$

Comme pour l'intégrale elliptique, on étudiera la fonction u au voisinage de chaque pôle en posant : $\quad u = a + u'^2$

et la même démonstration s'appliquera ici

Pour le cas où u tend vers l'infini, on posera : $\quad u = \frac{1}{v}$

$$\frac{du}{dz} = \frac{-1}{v^2}\frac{dv}{dz} = \sqrt{\frac{A}{v^6}(1-av)(1-bv)\dots\dots(1-fv)}$$

d'où : $\quad -\frac{dv}{dz} = \frac{\sqrt{A + Bv + \dots\dots\dots}}{v}$.

La quantité soumise au radical est fonction holomorphe de v au voisinage de $v = 0$ $(u = \infty)$ et par conséquent chaque détermination du radical est aussi holomorphe. Mais v s'annulera pour une certaine valeur de z, donc ce ~~ne~~ sera ~~pas~~ une fonction non uniforme de z, et elle aura cette valeur pour point critique algébrique. Or il y a nécessairement des valeurs finies de z qui annulent v c à d qui rendent u infinie, car pour $u = \infty$, z reste fini (intégrale de 1e espèce) z tend vers $\int \frac{du}{u^3}$.

Ainsi ce n'est que dans le cas d'un polynôme du 4e degré que u est fonction uniforme de z, et cette propriété tient à ce fait particulier que dans tout le plan, le degré étant $\underline{4}$, le facteur v^2 disparaît. Mais

cela n'a plus lieu au-delà du 3e degré.

— Revenons à l'équation: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Supposons pour prendre un cas simple (qui n'est pas le plus général), que $f(x, y)$ est une fonction rationnelle. Cherchons si elle peut avoir des points d'indétermination, nous entendons des points fixes, indépendants de l'intégrale y que l'on a choisie. On peut écrire

$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ P et Q étant des polynômes entiers premiers entre eux

Il peut y avoir dans Q des facteurs qui ne contiennent que x, et qui par conséquent s'annulent quel que soit y: marquons les points du plan qui annulent ces facteurs, ce sont des pôles fixes de $f(x, y)$; nous les éviterons, et nous isolerons en facteur le polynôme $Q(x)$ formé de tous ces facteurs (ayant pour racines tous ces pôles) — Parmi les valeurs qui annulent $Q(x, y)$, abstraction faite de $Q(x)$, quelques-unes, en nombre limité, peuvent annuler aussi $P(x, y)$; marquons encore ces points fixes et évitons-les. — Les autres valeurs qui rendent f infinie sont celles qui annulent Q seul: ces valeurs de y dépendent de x: appelons-les: $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, ... $\alpha_n(x)$; joignons-y: $y = \infty$, si Q est d'un degré inférieur à P en y.

Cela posé, partons d'un point x_0 et allons en un point x du plan par un certain chemin; la fonction y prendra en x une valeur déterminée. Pour qu'on fût arrêté en un point x_1, c à d pour que y devînt indéterminée en ce point, il faudrait que l'on rencontrât un des pôles ou points critiques algébriques de la fonction $f(x, y)$, qui

nous évitons par hypothèse. Pour qu'on fût arrêté, il faudrait que les rayons des cercles au moyen desquels on étend de proche en proche la fonction le long du chemin suivi (cf pages 112-116) tendissent vers zéro, c.à.d que pour $x = x_1$, y tendît vers une des valeurs :

$\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, ... $\alpha_n(x)$ ou ∞

car y ne peut être indéterminé, et doit tendre vers une limite ; et puisqu'on évite les pôles et points critiques, la fonction f ne peut plus devenir infinie que pour ces valeurs de y. Mais, si près qu'on soit du point x_1, on pourra toujours faire que y diffère de l'une de ces valeurs $\alpha_1(x_1)$, $\alpha_2(x_1)$, ... $\alpha_n(x_1)$ et ∞ d'une quantité finie, puisque c'est une intégrale dont la valeur initiale est arbitraire, et par conséquent le rayon de convergence ne deviendra jamais infiniment petit. Ainsi, si l'on évite les pôles et points critiques algébriques, on ne rencontrera aucun point d'indétermination ; donc la fonction $f(x,y)$ n'a que des points d'indétermination fixes, qui sont ses pôles et points critiques algébriques.

Ce qui fait le intérêt de cette proposition, c'est qu'elle n'est vraie que pour les équations différentielles du 1er ordre ; en effet dans les équations d'ordre supérieur au 1er, comme $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y)$

la fonction f a des points d'indétermination qui dépendent de l'intégrale y.

Il peut arriver qu'en prolongeant analytiquement la fonction rationnelle $f(x,y)$, on rencontre dans le plan des points où elle n'est plus holomorphe sans pour cela devenir infinie. Supposons par exemple qu'elle devienne indéterminée en un point (x_0, y_0) nous pouvons

toujours faire : $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. La fonction f prendra la forme d'un quotient de 2 polynômes qui s'annulent pour $x = 0$, $y = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + \dots\dots}{a_1 x + b_1 y + \dots\dots}$$

Nous allons chercher les intégrales de cette équation qui se réduisent à 0 pour $x = 0$.

Nous examinerons d'abord le cas particulier, étudié par Briot et Bouquet, où le dénominateur se réduit à x ; on a

$$x \frac{dy}{dx} = ax + by + \dots\dots$$

On va démontrer que si b n'est pas un entier positif, cette équation a une intégrale holomorphe qui s'annule pour $x = 0$.

Ecrivons-la : $$x\frac{dy}{dx} - by = ax + \varphi_2(x, y)$$

φ_2 contenant des termes du 2e degré au moins. En différentiant n fois, on aura les dérivées successives de y par rapport à x pour $x = 0$, $y = 0$: tous les termes ayant x ou y en facteur disparaissent :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (1 - b) = a \qquad 1 - b \gtrless 0.$$

et en général :

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 (n - b) = 0 \qquad n - b \gtrless 0.$$

Grâce à l'hypothèse faite sur b, on ne sera jamais arrêté dans ces dérivations. Mais si b était un nombre entier n, le 1er membre deviendrait identiquement nul, et l'on aurait une relation entre les divers coefficients qui figurent dans le 2e membre.

On pourra donc obtenir le développement de y en série de Taylor, et le prolonger aussi loin qu'on voudra. Reste à prouver qu'il est

convergent ; pour cela, nous emploierons encore la méthode de comparaison. Soit ω le minimum du module de $(n-b)$:

$|n-b| \geq \omega > 0$ et M le maximum du module de f quand x reste dans un cercle de rayon ρ, y ds un cercle de ray. r.

Prenons, au lieu de
$$\frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{Y}{r}\right)}$$
une fonction ayant les mêmes dérivées, mais s'annulant pour $x=0$, $y=0$, et n'ayant pas de terme du 1er degré en y ; càd. retranchons à la fonction précédente son terme constant et son terme en y ; et posons :
$$\omega Y = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{Y}{r}\right)} - M - \frac{MY}{r}$$
Les dérivées de cette fonction sont ~~toutes~~ positives, et supérieures en valeur absolue aux dérivées correspondantes de $\left(x\frac{dy}{dx} - by\right)$

Remarquons que l'équation de comparaison est ici une équation algébrique, et non une équation différentielle.

Comme ~~elle est~~ la fonction est holomorphe en x et Y à l'intérieur de leurs cercles, et que sa dérivée par rapport à Y $(\omega > 0)$ est différente de 0, cette équation définit une fonction implicite Y de x. D'ailleurs tous les coefficients, dans le développement du 2e membre, sont réels et positifs ; donc les dérivées successives ; $\omega\frac{dY}{dx}$, $\omega\frac{d^2Y}{dx^2}$, ... du 1er membre sont toutes positives.

Y sera une fonction holomorphe convergente dans un certain cercle autour de $x=0$. — Si maintenant on compare ce développement à celui de $\left(x\frac{dy}{dx} - by\right)$, on voit que tous ses coefficients sont plus grands en valeur absolue que ceux de celui-ci. On a

dans les 1ers membres différentiés n fois : $|n-b| > \omega$
donc en divisant par ω le 2e membre, on augmente à chaque dérivation successive le module du coefficient de y. La convergence du développement de y est donc bien établie, à la condition que b ne soit pas un entier.

On peut se demander s'il y a d'autres intégrales s'annulant pour $x=0$, outre cette intégrale holomorphe que nous venons de trouver. Nous traiterons cette question dans le cas général ; toutefois, on peut prouver que si la partie réelle de b est négative, il n'y a pas d'autre intégrale s'annulant pour $x=0$, sous certaines conditions imposées au chemin par lequel x tend vers 0.

Nous venons de prouver l'existence de l'intégrale holomorphe y_1 ; supposons que l'équation admette une autre intégrale : $y_1 + y$;
on aura : $$x\left(\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy}{dx}\right) = ax + b(y_1+y) + \dots\dots$$
d'où : $$x\frac{dy}{dx} = y\left(b + \varphi(x,y)\right) \qquad \varphi(0,0) = 0.$$
Par hypothèse, cette nouvelle équation doit avoir une intégrale qui s'annule pour $x=0$, car on doit avoir : $y_1 + y = y_1 = 0$ (pour $x=0$.)
Écrivons le 2e membre sous une forme différente, par un groupement de termes. Joignons à b tous les termes qui ne contiennent que y dans $\varphi(x,y)$, soit : $P(y)$ $[P(0)=0]$
Les autres termes contenant x au 1er degré au moins, on peut les écrire : $x\,Q(x,y)$ $\quad Q$ holomorphe en x, y.
On a ainsi : $$x\frac{dy}{dx} = by(1+P) + xy\,Q \qquad [1+P(y)] \gtrless 0 \text{ pour } x=0,\ y=0.$$

Divisons les 2 membres par : $xy[1+P(y)]$

$$\frac{dy}{y(1+P)} = b\frac{dx}{x} + \frac{Q(x,y)}{1+P(y)}dx$$

Posons :

$$\frac{Q(x,y)}{1+P(y)} = \psi(x,y)$$ fonction holomorphe en x ; et :

$$\frac{1}{y[1+P(y)]} = \frac{1}{y} + \varpi(y)$$

L'équation devient :

$$\frac{dy}{y} + \varpi(y)\,dy = b\frac{dx}{x} + \psi(x,y)\,dx$$

Intégrons :

$$\log\frac{y}{y_0} + \int_{x_0}^{x}\varpi(y)\,dy = \log\left(\frac{x}{x_0}\right)^b + \int_{x_0}^{x}\psi(x,y)\,dx$$

d'où :
$$\frac{y}{y_0}e^{F(y)} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^b e^{\int_{x_0}^{x}\psi(x,y)dx} \qquad F(y) = \int_{x_0}^{x}\varpi(y)\,dy$$

Or cette égalité est impossible car, les 2 exponentielles restant finies, $\frac{y}{y_0}$ tend vers 0, tandis que $\left(\frac{x}{x_0}\right)^b$ augmente indéfiniment, parce que b a sa partie réelle négative, et que x tend vers 0. Seulement x doit tendre vers 0 de telle sorte que son argument θ reste compris entre des limites finies. Cherchons en effet à quelle condition x^b tendra vers ∞ en même temps que x ; posons :

$$x = re^{i\theta} \qquad b = \alpha + i\beta \quad (\alpha < 0)$$

$$x^b = e^{b\log x} = e^{(\alpha+i\beta)(\log r + i\theta)} = e^{\alpha\log r - \beta\theta} \times e^{i(\alpha\theta + \beta\log r)}$$

$|x^b| = e^{\alpha\log r - \beta\theta}$ tendra vers ∞ si $(\alpha\log r - i\theta)$ tend vers $+\infty$.

Or $\alpha\log r > 0$ dès que $|x| < 1$, et $\alpha\log r$ croît indéfiniment. Mais si θ augmente aussi indéfiniment de telle sorte

que $\beta\theta$ tende vers $+\infty$, $|x^b|$ pourra avoir une limite finie et même nulle. Supposons par exemple β positif, et prenons :
$\log r = -\sqrt{\theta}$ qui donne la courbe : $r = e^{-\sqrt{\theta}}$
r tend vers 0 quand θ augmente indéfiniment, ce qui engendre une spirale ayant pour point asymptote l'origine : on aura :

$$|x^b| = e^{-\alpha\sqrt{\theta} - \beta\theta} \qquad \alpha\sqrt{\theta} < 0 \qquad \beta\theta > 0.$$

Quand θ augmente indéfiniment, $\beta\theta$ l'emporte sur $\alpha\sqrt{\theta}$, et $|x^b|$ tend vers 0, l'exposant de e tendant vers $-\infty$. Alors l'intégrale de l'équation proposée tendra aussi vers 0 :

$$x\frac{dy}{dx} - by = 0 \qquad \frac{dy}{y} = b\frac{dx}{x} \qquad y = Cx^b$$

On peut donc obtenir une intégrale qui s'annule pour $x = 0$, en faisant suivre à x une infinité de chemins ~~infinis~~ tendant vers 0 comme la spirale précédente, par une infinité de tours. Ainsi la restriction apportée à la nature du chemin parcouru par x est ici indispensable, parce qu'elle est inhérente à la question, et non introduite par la démonstration (cf. page 107.)

Nous n'examinerons pas le cas où b aurait sa partie positive : $\alpha > 0$. Voyons seulement ce qui arrive dans le cas particulier où ; $a = 0$, $b = 1$: $x\frac{dy}{dx} = y + \dots$
Posons : $y = \lambda x$ On ramène ainsi l'équation à la forme générale $x(\lambda + x\frac{d\lambda}{dx}) = \lambda x + x^2[\dots]$

$$\frac{d\lambda}{dx} = \varphi(\lambda, x)$$

φ fonction holomorphe de λ et de x ;

Comme λ est arbitraire, il y a une infinité d'intégrales holomorphes de cette équation, et par conséquent autant de solutions pour y: car on peut se donner à volonté le 1er terme (constant) du développement de λ –

Revenons à l'équation générale :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + \ldots}{a_1 x + b_1 y + \ldots}$$

On suppose qu'il n'y a pas de relation particulière entre les coefficients. Réduisons les termes du 1er degré au terme en y dans le numérateur, au terme en x dans le dénominateur. Pour cela, posons :

$$x = \alpha X + \beta Y \qquad y = \gamma X + \delta Y$$

Par ce changement de variables, on peut ramener l'équation à la forme demandée :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\lambda_2 Y + \ldots}{\lambda_1 X + \ldots}$$

Substituons ces expressions dans l'équation primitive et chassons les dénominateurs :

$$\left[a_1(\alpha X + \beta Y) + b_1(\gamma X + \delta Y) + \ldots\right](\gamma dX + \delta dY) - \left[a(\alpha X + \beta Y) + b(\gamma X + \delta Y) + \ldots\right](\alpha dX + \beta dY) = 0$$

Or, dans le coefficient de dX doit figurer seulement Y, dans celui de dY seulement X; égalons à 0 les coefficients de XdX, YdY :

$$(a_1\alpha + b_1\gamma)\gamma - (a\alpha + b\gamma)\alpha = 0$$
$$(a_1\beta + b_1\delta)\delta - (a\beta + b\delta)\beta = 0$$

Ces 2 équations entre β et δ, d'une part, α et γ de l'autre, sont identiques : on aura donc les valeurs des 2 rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\delta}$, par une même équation du 2e degré. Si elle a ses racines inégales,

on prendra l'une pour $\frac{\alpha}{\gamma}$, l'autre pour $\frac{\beta}{\delta}$, car le déterminant fonctionnel de la transformation $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ ne doit pas être nul:

$$\frac{\alpha}{\gamma} \gtrless \frac{\beta}{\delta}.$$

D'ailleurs l'équation ne peut pas avoir ses racines égales ce qui supposerait une relation entre les coefficients. On aura donc 2 valeurs distinctes pour $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\delta}$.

On est ainsi ramené à étudier une équation de la forme:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_2 y}{\lambda_1 x}$$

Cherchons quelle est la forme de l'intégrale générale de cette équation dans le voisinage du point $x = 0$, $y = 0$.

Cette intégrale sera: $f(x, y) = C$

la fonction f vérifiant l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda_1 x + \ldots\ldots) + \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda_2 y + \ldots\ldots) = 0$$

Cette équation admet une infinité de solutions, puisqu'on peut ajouter une constante à f. Nous allons chercher une forme particulière de l'intégrale f — Il n'y a pas, d'ailleurs, d'intégrale holomorphe de cette équation, si ce n'est la solution insignifiante: $f = 0$.

Considérons l'équation suivante:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}\left[\lambda_1 x + \ldots\ldots\right] + \frac{\partial u_1}{\partial y}\left[\lambda_2 y + \ldots\ldots\right] = \lambda_1 u_1$$

Elle admet une intégrale holomorphe qui s'annule pour $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ si le quotient $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ n'est pas un nombre réel négatif

Considérons aussi l'équation toute semblable :

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}\left[\lambda_1 x + \ldots\right] + \frac{\partial u_2}{\partial y}\left[\lambda_2 y + \ldots\right] = \lambda_2 u_2$$

Sous la même conditions, elle aura une intégrale holomorphe s'annulant pour $x=0$, $y=0$; Soient $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ ces 2 intégrales. On peut avec ces 2 fonctions composer une solution de l'équation proposée. Multiplions l'équation en $\underline{u_2}$ par $\lambda_1 u_1^{\lambda_2} u_2^{\lambda_1 - 1}$, l'équation en u_1 par $\lambda_2 u_1^{\lambda_2 - 1} u_2^{\lambda_1}$, et retranchons-les : les 2es membres disparaissent et l'on trouve :

$$\lambda_2 u_1^{\lambda_2 - 1} u_2^{\lambda_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \lambda_1 u_1^{\lambda_2} u_2^{\lambda_1 - 1} \frac{\partial u_2}{\partial x} = D_x\left(\frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}}\right) \times u_2^{2\lambda_1}$$

$$\left[\lambda_1 x + \ldots\right] D_x\left(\frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}}\right) + \left[\lambda_2 y + \ldots\right] D_y\left(\frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}}\right) = 0$$

ce qui montre que $\frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}}$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles en f, u_1, u_2 étant des fonctions holomorphes au voisinage de $x=0$, $y=0$. On aura l'intégrale générale de l'équation différentielle en égalant à une constante le quotient :

$$\frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}}.$$

On peut remarquer que l'existence et la nature des intégrales dépendent, dans ces questions, du caractère et de la valeur numériques, non plus même des exposants (comme page 128) mais des coefficients, ce qui fait intervenir les considérations arithmétiques dès qu'on approfondit la théorie des équations différentielles.

— Nous avons à démontrer la proposition invoquée ci-dessus, à savoir que l'équation aux dérivées partielles

$$\left[\lambda_1 x + \ldots\ldots\right] \frac{du}{dx} + \left[\lambda_2 y + \ldots\ldots\right] \frac{du}{dy} = \lambda_1 u$$

a pour solution une intégrale holomorphe qui s'annule pour $x=0$, $y=0$. Cherchons à quelles conditions les dérivées partielles de cette solution u seront déterminées pour $x=0$, $y=0$. Prenons la dérivée partielle par rapport à x de l'équation précédente, et faisons : $x=0$, $y=0$; on a : $\lambda_1 \frac{du}{dx} = \lambda_1 \frac{du}{dx}$

Donc $\left(\frac{du}{dx}\right)_{00}$ est indéterminée — La dérivée par rapport à y est : $\lambda_2 \frac{du}{dy} = 0$ Donc $\left(\frac{du}{dy}\right)_{00} = 0$.

Ainsi, si l'on se donne arbitrairement la valeur de $\frac{du}{dx}$ pour $x=0$, $y=0$, on aura pour toutes les dérivées partielles successives des valeurs déterminées. En effet, une dérivée d'ordre quelconque (pour $x=0$, $y=0$) ne peut provenir que des termes :

$$\lambda_1 x \frac{du}{dx}, \quad \lambda_2 y \frac{du}{dy}, \quad \lambda_1 u$$

Dérivons n fois l'équation par rapport à x :

$$\ldots + \lambda_1 n \frac{d^n u}{dx^n} + \lambda_2 y \frac{d^{n+1} u}{dx^n dy} = \lambda_1 \frac{d^n u}{dx^n} + \ldots$$

puis p fois par rapport à y :

$$\ldots + \lambda_1 n \frac{d^{n+p} u}{dx^n dy^p} + \lambda_2 p \frac{d^{n+p} u}{dx^n dy^p} = \lambda_1 \frac{d^{n+p} u}{dx^n dy^p} + \ldots$$

Le coefficient de $\frac{d^{n+p} u}{dx^n dy^p}$ sera donc : $\lambda_1 (n-1) + \lambda_2 p$

et s'il n'est pas nul, on aura pour la dérivée une valeur déterminée.
Donc toutes les dérivées partielles successives (une fois $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{00}$ choisie arbitrairement) seront déterminées pourvu que le coefficient :

$\lambda_1(n-1) + \lambda_2 p$ ne s'annule pour aucun système de valeurs entières positives attribuées à n et p. $(n \geq 1)$

On voit d'abord que si le rapport : $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est imaginaire, le coefficient ne peut s'annuler. Il reste à examiner les valeurs réelles qu'il peut prendre. — Or si $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est positif le coefficient ne peut s'annuler, à moins que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ne soit un nombre entier q, auquel cas, pour $n = 0$, $p = q$, le coefficient serait nul.
Donc $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ peut être positif, mais non entier : dans ces conditions, le coefficient non seulement ne s'annule pas mais reste fini. —
Si au contraire $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est négatif le coefficient pourra devenir aussi petit qu'on voudra, car on peut prendre des entiers positifs n et p suffisamment grands pour que le rapport : $-\frac{p}{n-1}$ soit aussi voisin qu'on voudra de $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, et par conséquent le coefficient soit aussi voisin qu'on voudra de 0 ; il pourra même être rendu rigoureusement nul si $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est commensurable.
En résumé, nous excluons donc les 2 hypothèses : $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ négatif et $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ entier positif. Sous ces conditions, nous allons démontrer le théorème annoncé.
Pour cela, nous poserons d'abord : $u = Ax + v$
Par ce changement de variable on a l'équation transformée en v :

$$\left[\lambda_1 x + \ldots\right]\frac{\partial v}{\partial x} + \left[\lambda_2 y + \ldots\right]\frac{\partial v}{\partial y} = \lambda_1 (Ax + v) - \left[\lambda_1 x + \ldots\right] A$$
$$= \lambda_1 v - A\left[\varpi_2(x, y)\right]$$

ϖ_2 étant un ensemble de termes du 2e degré au moins en x, y

$$\lambda_1 x \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial v}{\partial y} - \lambda_1 v = \varphi_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \chi_2 \qquad (1)$$

Le 2e membre de cette équation est du 2e degré (minimum) en x, y.
On va démontrer que la fonction v, solution de cette équation, a un développement convergent.

Nous emploierons toujours la même méthode (calcul des limites)
Nous remplacerons $\varphi_2 \ \psi_2 \ \chi_2$ par une fonction de comparaison de la forme: $\dfrac{M}{1 - \dfrac{x+y}{r}}$ M étant le module maximum de $\varphi_2 \ \psi_2 \ \chi_2$ dans le cercle r.

Nous pouvons, pour simplifier, supposer $r = 1$; de plus, pour rendre les fonctions comparables, retranchons de la fonction de comparaison les termes du 1er degré; elle aura la forme définitive:

$$\frac{M}{1-x-y} - M - Mx - My$$

A $\lambda_1 \lambda_2$ nous substituerons une quantité positive ε; on a l'équation de comparaison:

$$\varepsilon x \frac{\partial V}{\partial x} + \varepsilon y \frac{\partial V}{\partial y} - \varepsilon V = \left[\frac{M}{1-x-y} - M - Mx - My\right]\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + 1\right) \qquad (2)$$

définissant la fonction V.

Le coefficient de la dérivée générale: $\dfrac{\partial^{n+p} u}{\partial x^n \partial y^p}$ était:

$\lambda_1(n-1) + \lambda_2 p$

Il sera pour la nouvelle fonction (contenue dans V):

$\varepsilon(n-1) + \varepsilon p.$

Or on peut prendre ε assez petit pour que

$$\left|\varepsilon(n-1+p)\right| < \left|\lambda_1(n-1)+\lambda_2 p\right|$$

En effet, la fraction : $\dfrac{\lambda_1(n-1)+\lambda_2 p}{n-1+p}$

quand on donne à n et p toutes les valeurs positives entières, passe par une valeur minima qui n'est ni nulle ni infiniment petite, car le numérateur reste fini, grâce aux hypothèses restrictives que nous avons faites sur $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

On pourra donc prendre pour ε le minimum de cette fraction.

Alors chaque dérivée de la fonction V sera plus grande que la dérivée correspondante de Y, et de plus sera positive, car chaque coefficient est plus petit en valeur absolue, et comme les coefficients des dérivées de V sont tous positifs, l'inégalité ne peut que se maintenir, et même augmenter dans le même sens, entre les dérivées correspondantes. La fonction V remplit donc bien les conditions d'une fonction de comparaison.

Reste à étudier l'équation (2) pour savoir si son intégrale V est holomorphe. Divisons par ε et posons : $M' = \dfrac{M}{\varepsilon}$:

Considérons V comme fonction de $(x+y) = z$: l'éq (2) devient : $\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial z}\right)$

$$z\frac{\partial V}{\partial z} - V = \left(\frac{M'}{1-z} - M' - M'z\right)\left(2\frac{\partial V}{\partial z} + 1\right)$$

Comme on veut que $\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = 0$ comme : $\left(\dfrac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 = 0$

la dérivée de V par rapport à z doit être nulle pour $z = 0$.

Or l'équation précédente est de la forme précédemment étudiée (p. 135) :

$$x\frac{dy}{dx} = ax + by + \ldots\ldots$$

et l'on sait que si : $b=1$, $a=0$, en posant $y=\lambda x$, on a une infinité de solutions holomorphes pour λ, et par suite pour y. — L'équation (2) peut en effet s'écrire :

$$z\frac{\partial V}{\partial z} = V + \left(2\frac{\partial V}{\partial z}+1\right)M'\left[\frac{1}{1-z}-(1+z)\right] \qquad \left[\frac{z^2}{1-z}\right]$$

Or le crochet, développé, commence par un terme du 2e degré ; cette équation rentre bien dans le type précédent et admet une infinité de solutions holomorphes V s'annulant pour $z=0$: $V(0)=0$. — Mais comme on veut de plus que $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = 0$, cette nouvelle condition en détermine une seule.

Nous avons donc une intégrale parfaitement déterminée $V(z)$ au voisinage de $z=0$. Il est donc démontré que l'équation :

$$(\lambda_1 x + \ldots\ldots)\frac{\partial u_1}{\partial x} + (\lambda_2 y + \ldots\ldots)\frac{\partial u_1}{\partial y} = \lambda_1 u_1$$

admet une intégrale holomorphe qui s'annule pour $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ et dont la dérivée $\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{00}$ prend une valeur arbitraire. —

Les mêmes raisonnements s'appliqueraient à l'équation :

$$(\lambda_1 x + \ldots\ldots)\frac{\partial u_2}{\partial x} + (\lambda_2 y + \ldots\ldots)\frac{\partial u_2}{\partial y} = \lambda_2 u_2$$

Elle admet une intégrale holomorphe u_2 s'annulant pour $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ et dont la dérivée $\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)_{00}$ prend une valeur arbitraire, à la condition qu'on exclue les 2 hypothèses : $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ négatif, et : $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ entier positif. La condition totale de ce double résultat exclut donc : $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ négatif, et $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ positif, entier ou inverse d'entier.

Sous ces restrictions, on aura les résultats annoncés (p 138); le quotient : $\dfrac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}}$ sera une solution de l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left[\lambda_1 x + \ldots\ldots\right] + \frac{\partial f}{\partial y}\left[\lambda_2 y + \ldots\ldots\right] = 0$$

et l'intégrale générale de l'équation : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\lambda_2 y + \ldots\ldots}{\lambda_1 x + \ldots\ldots}$

sera donnée par la formule :

$$u_1^{\lambda_2} = C u_2^{\lambda_1}$$

u_1, u_2 étant les solutions définies précédemment, s'annulant pour $x=0$, $y=0$, et telles qu'on puisse choisir arbitrairement les valeurs de $\dfrac{\partial u_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u_2}{\partial y}$ pour $x=0$, $y=0$.

Examinons le cas particulier : $x\dfrac{dy}{dx} = ax + by + \ldots\ldots$

Briot et Bouquet ont montré que si $\underline{b}$ a sa partie réelle positive cette équation admet une infinité d'intégrales autres que l'intégrale holomorphe, et prenant une même valeur initiale. Nous allons le démontrer en nous appuyant sur les conclusions précédentes. Pour cela, ramenons l'équation à la forme canonique :

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\lambda_2 y + \ldots\ldots}{\lambda_1 x + \ldots\ldots}$ or on a : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ax + by + \ldots\ldots}{x}$

Il s'agit d'annuler le coefficient $\underline{a}$. Posons : $y = \alpha x + Y$

$x\left(\alpha + \dfrac{dY}{dx}\right) = (a + b\alpha)x + bY + \ldots\ldots$ Supposons $b \gtrless 1$;

faisons : $\alpha = a + b\alpha$, c. à d. : $\alpha = \dfrac{a}{1-b}$.

L'équation devient : $\dfrac{dY}{dx} = \dfrac{bY + \ldots\ldots}{x}$

Nous n'aurons qu'à faire dans les formules : $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = b$:

$$x \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left[bY + \dots \right] \frac{\partial u_1}{\partial Y} = u_1 \qquad x \frac{\partial u_2}{\partial x} + \left[bY + \dots \right] \frac{\partial u_2}{\partial Y} = b u_2$$

La 1e équation admet la solution : $u_1 = x$

la 2e donnera une solution u_2, fonction holomorphe en x, Y.

On aura donc : $\quad u_2(x, Y) = C x^b$

Telle est la forme de l'intégrale générale. Si, suivant l'hypothèse, la partie réelle de $\underline{b}$ est positive, x^b tendra vers 0 avec x ; on aura donc : $\quad u_2(0, Y) = 0$

et l'équation précédente donnera une infinité d'intégrales s'annulant pour $x = 0$, correspondant à l'infinité des valeurs arbitraires qu'on peut assigner à C. Y est définie par cette équation comme fonction holomorphe de x et x^b.

Si au contraire $\underline{b}$ avait sa partie réelle négative, cette conclusion ne serait plus vraie. Toutefois, x^b pourrait encore tendre vers 0 avec x, comme nous l'avons expliqué (page 134) en suivant un chemin infini faisant une infinité de tours autour du point asymptotique 0. (voir <u>note</u> page 150)

Inversement, le cas que nous venons de traiter :

$$x \frac{dy}{dx} = ax + by + \dots$$

peut être considéré comme le cas général auquel on peut ramener le cas particulier : $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ax + by + \dots}{a_1 x + b_1 y + \dots}$ (page 130)

Pour cela, posons : $\quad \dfrac{y}{x} = t. \qquad y = tx.$

La 2e équation devient : $x\frac{dt}{dx}+t = \frac{a+bt+x(\quad)}{a_1+b_1t+x(\quad)}$

ou : $$x\frac{dt}{dx} = \frac{a+bt+x(\quad)}{a_1+b_1t+x(\quad)} - t$$

Pour $x=0$, $y=0$, le 2e membre doit être nul : $\frac{a+bt}{a_1+b_1t} - t = 0$.
Cette équation aura en général 2 racines distinctes, t_1, t_2 (en supposant qu'il n'y a aucune relation entre les coefficients). Alors t pourra tendre vers chacune d'elles. Dans le voisinage du système $x=0$, $t=t_1$, on aura un développement holomorphe pour $x\frac{dt}{dx}$, on en aura un autre dans le voisinage de : $x=0$, $t=t_2$.
On aura donc 2 équations différentielles de la forme cherchée :

$$x\frac{dy}{dx} = ax+by+\ldots\ldots$$

Seulement, il n'est pas démontré que $\underline{t}$ doive nécessairement tendre vers t_1 ou t_2. Il est certain que $\underline{t}$ ne peut avoir une limite différente de t_1, t_2, quand x tend vers 0. En effet,

$x\frac{dt}{dx} = \varphi(t,x)$ $\qquad$ φ holomorphe en t, x

Supposons que cette équation admette une intégrale qui pour $x=0$, prendrait la valeur t_3 (différente de t_1 et de t_2) ; on aurait :

$\varphi(t_3, 0) \gtrless 0$ $\qquad$ ce qui ~~est~~ impossible.

En effet, on a x en fonction de t par un certain développement : x doit s'annuler pour $t=t_3$, ainsi que toutes ses dérivées. Tous les coefficients du développement de x s'annulant pour $t=t_3$, il n'y a pas de fonction x de t, ni de fonction t de x prenant

pour $x=0$ la valeur t_3.

Dans tous les cas où l'intégrale générale pourra prendre la forme :

$u_1^{\lambda_2} = C u_2^{\lambda_1}$ on pourra rechercher s'il y a une intégrale sans que $t = \frac{y}{x}$ ait une limite déterminée. Or cela ne se peut quand $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est réel et négatif ; mais dans ce cas, on peut démontrer un théorème relatif à cette question.

Mettons d'abord l'équation sous la forme canonique :

$$x\frac{dt}{dx} + t = \frac{\lambda_2 t + x(\quad)}{\lambda_1 + x(\quad)} \qquad x\frac{dt}{dx} = \frac{\lambda_2 t + x(\quad)}{\lambda_1 + x(\quad)} - t$$

L'équation qui a pour racines $t_1\ t_2$ se réduit au 1er degré :

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\,t = 0$$

Elle admet les solutions :

$$t_1 = 0 \qquad t_2 = \infty \qquad (\lambda_2 \gtrless \lambda_1)$$

On a donc 2 intégrales holomorphes de l'équation :

$$x\frac{dt}{dx} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right) t + \ldots\ldots$$

se réduisant respectivement à 0 et à ∞ pour $x=0$.

La 1e, qui s'annule pour $x=0$, donne une fonction y holomorphe en x ; et inversement, on a une fonction x holomorphe en y s'annulant pour $y=0$. — La 2e ($t_2=\infty$ pour $x=0$) ne donne pas une solution holomorphe car y commence par un terme en x^2, et a un point critique algébrique comme $\sqrt{x^2}$.

Reste à savoir s'il n'y a pas d'autres intégrales pour lesquelles t ne tende vers aucune limite déterminée —

On peut démontrer que si x et y ont des variations représentées dans leurs plans respectifs par des courbes de longueur finie il n'y a pas d'autre intégrale que celles qui se réduisent à t_1 t_2 pour $x=0$ (Nous nous contentons d'énoncer ce théorème)

— Remarque sur la réduction à la forme canonique. Au lieu de la transformation employée (page 136), posons les formules suivantes résolues par rapport aux nouvelles variables:

$$X = \alpha x + \beta y \qquad Y = \gamma x + \delta y$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\gamma dx + \delta dy}{\alpha dx + \beta dy} = \frac{\gamma(ax+by) + \delta(a_1x+b_1y)+\dots}{\alpha(ax+by) + \beta(a_1x+b_1y)+\dots}$$

On doit donc avoir la proportionnalité:

$$\alpha(ax+by) + \beta(a_1x+b_1y) = \lambda(\alpha x+\beta y)$$

$$\gamma(ax+by) + \delta(a_1x+b_1y) = \lambda(\gamma x+\delta y)$$

D'où: $\alpha(a-\lambda)+\beta a_1 = 0$ $\qquad \alpha b + \beta(b_1-\lambda) = 0$

et de même: $\gamma(a-\lambda)+\delta a_1 = 0$ $\qquad \gamma b + \delta(b_1-\lambda) = 0$

λ doit être racine de l'équation:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & a_1 \\ b_1 & b-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

On tirera $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\gamma}{\delta}$ d'une même équation du 2e degré dont ce seront les 2 racines distinctes.

— Nous avons étudié l'équation: $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x+b_1y+\dots}{ax+by+\dots}$

en supposant que: $ab_1 - a_1b \gtrless 0$,

c.à.d. que le point $(x_0\, y_0)$ était un point simple des 2 courbes:

$a_1 x + b_1 y + \dots = 0$ $\qquad$ $ax + by + \dots = 0.$

Si au contraire on a : $\quad ab_1 - a_1 b = 0,$

les 2 courbes sont tangentes à l'origine, et les résultats sont tout différents pour les intégrales. Posons encore : $\quad y = tx$

l'équation devient : $\quad t + x\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{a_1 + b_1 t + x(\quad)}{a + bt + x(\quad)}$

et par hypothèse, on a : $\quad k(a+bt) = a_1 + b_1 t$

Posons : $\quad a + bt = \mu x \quad$ ou : $\quad t = \dfrac{\mu x - a}{b}$

$$\frac{\mu x - a}{b} + \frac{x}{b}\left[\mu + x\frac{d\mu}{dx}\right] = \frac{k\mu + \dots}{\mu + \dots}$$

μ fonction de x

Le coefficient de x^2 est $\quad \dfrac{1}{b}\dfrac{d\mu}{dx}$, on est donc ramené à la forme :

$$x^2 \frac{dy}{dx} = ax + by$$

dont l'intégrale générale est :

$y = Ce^{-\frac{b}{x}}$ dont le point $x = 0$ est un point singulier essentiel –

Si l'on cherche une intégrale holomorphe qui s'annule pour $x = 0$, on peut calculer de proche en proche les coefficients de son développement ; mais ce développement n'est pas convergent – On pose :

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

On substitue :

$$x^2(A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \dots) = ax + b(A_1 x + A_2 x^2 + \dots)$$

On égale les coefficients correspondants dans les 2 membres :

$a + bA_1 = 0 \qquad A_1 = bA_2 \dots \quad$ en général : $\quad nA_n = bA_{n+1}$

Mais si l'on forme le rapport d'un terme au précédent, on trouve :

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} x = \frac{nx}{b}$$

qui augmente indéfiniment avec n si petit que puisse être x (à moins que $x = 0$)

Il n'y a donc pas d'intégrale holomorphe –

Addition à la page 145.

Examinons le cas où $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ serait un entier positif, c.à.d. où, dans l'équation : $x\frac{dy}{dx} = ax + by + \dots$ ou : $\frac{dY}{dx} = \frac{bY + \dots}{x}$

b serait un entier positif ($\lambda_1 = 1$) — Supposons, pour préciser, $b = 1$. On a en général (pour b positif non entier) l'intégrale générale

$$u_2(x, Y) = Cx^b$$

Faisons tendre b vers 1, et cherchons ce que devient l'intégrale Y — L'intégrale générale peut s'écrire ; $\frac{u_2(x,Y) - Cx}{b-1} = C\,\frac{x^b - x}{b-1}$

Y est alors développé en une série suivant les nouvelles variables x et $\frac{x^b - x}{b-1}$. Faisons $b = 1$, prenons les dérivées par rapport à b ;

$$\lim_{b=1} \frac{x^b - x}{b-1} = x\log x$$

La série qui représente Y reste convergente (nous nous dispensons de le démontrer ; on le ferait toujours par la méthode de comparaison) Donc l'équation différentielle proposée a une infinité d'intégrales holomorphes, s'annulant pour $x = 0$, et développables en séries suivant les puissances de x et de $x\log x$



